Sammlung Algebraischer Aufgaben

nebst

einer Einleitung

in die

Buchstabenrechnung und Algebra.

Von

Johann Philipp Grüson,

Königlichen Professor der Mathematik beym adelichen Cadetten-Corps in Berlin.

Zweyter Theil.

Enthaltend Aufgaben vom ersten Grade mit Zwey unbekannten Größen.

Halle, 1794.

In Johann Christian Hendels Verlage.

Vorbericht.

Es erscheint hier die Fortsetzung meiner Sammlung Algebraischer Aufgaben. Der Beyfall mit welchem das erstere Stück ist aufgenommen worden, hat meinen Fleiß, diesem zweyten einen noch höhern Grad der Vollkommenheit zu ertheilen, nicht wenig erhöhet.

Gerne habe ich daher die Erinnerungen benutzt, welche von sachkundigen Männern in öffentlichen Blättern, mir hierüber sind ertheilt worden. Habe ich sie nicht alle benutzt, so rührte dieses von der Verschiedenheit des Gesichtspunkts her, aus welchem der Recensent und ich das Werk und seinen Zweck ansahen.

So

So glaube ich noch immer, daß mein Zweck, dem Lehrer selbst, wenn er Aufgaben ausser dem Zusammenhange nehmen will, woran ihm nicht viel liegt, verständlich zu seyn, durch meine Anordnung der Aufgaben besser erreicht worden ist, als es durch eine systematische geschehen würde, welche Recensent zu wünschen schien. Ich bin daher meinem Plane treu geblieben.

Wegen der zu weiten Entfernung des Druckorts, konnte die Correctur nicht unter meiner unmittelbaren Aufsicht besorgt werden. Es können daher manche Druckfehler eingeschlichen seyn; eine Unvollkommenheit, die ich durch ein hinten angehängtes verbesserndes Verzeichnis derselben einigermaassen zu heben suchen werde.

Uebrigens wünsche ich diesem zweyten Theil den Beyfall, mit welchem der erste aufgenommen wurde.

Der Verfasser.

Ich habe bereits im ersten Theile dieser Sammlung algebraischer Aufgaben Seite LX. §. 64. u. f. etwas von den Gleichungen gesagt, jetzt folgt eine weitere Ausführung der analytischen Methode, Aufgaben und Gleichungen vom ersten Grade mit einer und mehrern unbekannten Größen aufzulösen.

§. 1.

Durch Analysis verstehen wir hier die Wissenschaft vermittelst des algebraischen Calculs, und der Resolvirung der Gleichungen, alle die Aufgaben und verschiedenen Fragen, die über alle Arten der Größen gemacht werden können, aufzulösen.

§. 2.

Die Aufgaben oder die daraus entstehenden Gleichungen, können bestimmt, oder unbestimmt seyn. Bestimmt, wenn nur ein oder eine bestimmte Menge von Resultaten statt findet. Unbestimmt, wenn eine unbestimmte Zahl von Resultaten statt findet. Z. B. Zu drey gegebenen Größen a, b, c die vierte Proportionalzahl x. zu finden: Man hat vermöge der Bedingungen der Aufgabe $a : b = c : x$, und folglich $x = \frac{bc}{a}$. Hier ist klar, daß in diesem Fall x bestimmt ist, denn es kan keinen andern Werth haben als den, der durch $\frac{bc}{a}$ entstehet. Aber wenn verlangt würde zwey

Größen

Größen zu finden, deren Verhältniß, zweyen andern gegebenen Größen a und b gleich wäre; so würde diese Aufgabe unbestimmt seyn, weil man eine unzählige Menge finden kann, die das gegebene Verhältniß a : b haben.

Anmerk: Alle Aufgaben im ersten Theile dieses Werks, so wie auch in diesem zweyten Theile, sind bestimmte Aufgaben.

§. 3.

Wenn sich mehrere unbekannte Größen in einer Aufgabe befinden, und die darinnen enthaltenen verschiedenen Bedingungen eben so viel besondere Gleichungen geben; so ist die Aufgabe allezeit bestimmt, widrigenfals ist sie unbestimmt.

§. 4.

Die bestimmten Gleichungen im ersten Grade haben nur einen Werth. Die von höhern Graden können so viel besondere Werthe haben, als Einheiten in den höchsten Exponent der unbekannten Größe enthalten sind.

Z. B. So können die Gleichungen vom zweyten Grade, zwey; vom dritten Grade, drey; vom vierten Grade, vier Werthe haben, etc.

§. 5.

Von der analytischen Methode, bey Auflösung der Aufgaben:

Um durch die Analysis eine Aufgabe aufzulösen, muß man sogleich mit Aufmerksamkeit die verschiedenen Umstände betrachten, welche in der Aussage der Aufgabe enthalten sind; ferner die gegebenen, und die gesuchten Größen gehörig unterscheiden.

§. 6.

Die bekannten Größen drückt man durch die ersten Buchstaben des Alphabets aus a, b, c, d, etc. und die unbekannten Größen durch die letzten x, y, z, etc.

§. 7.

Nun nimmt man an die Aufgabe sey aufgelöst, und drückt durch die in der Aufgabe enthaltenen verschiedenen Größen, die Beziehungen aus, die sich unter ihnen befinden, so daß gleiche Ausdrücke oder Gleichungen entstehen.

§. 8.

Eine gut ausgedrückte bestimmte Aufgabe, enthält immer eben so viel besondre Bedingungen, als sie unbekannte Größen enthält, und es entstehen auch eben so viel Gleichungen. (§. 3.).

§. 9.

In denen verschiedenen Gleichungen, welche sich aus den Bedingungen der Aufgabe ergeben, befindet sich die unbekannte Größe, wenn nur eine Gleichung; oder die unbekannten Größen, wenn mehrere Gleichungen da sind, mit bekannten Größen auf beyden Seiten der Gleichung, durch Addition, Subtraction, Multiplikation, Division u. s. w. vermischt.

Da die Auflösung einer Aufgabe nur in der Findung des Werths der unbekannten Größen, welche in der Aussage enthalten sind, bestehet, so ist klar, daß wenn man die unbekannte Größe, welche man bestimmen will, auf eine Seite der Gleichung bringen könnte, u. sie hier allein ohne einen andern Coefficienten oder Divisor als die Einheit zu haben da stets ihr Werth alsdann durch das Resultat aller andern Größen, welche in der andern Seite der Gleichung enthalten sind, ausgedrückt wäre.

§. 10.

§. 10.

Daher ist die Wissenschaft Aufgaben aufzulösen, nichts anders, als die Auflösung der Gleichungen. Diese Operation wird verrichtet, indem man die unbekannten Größen von denen bekannten absondert; das heißt, indem man die unbekannten Größen durch einige der verschiedenen arithmetischen oder algebraischen Regeln, von allen andern Größen mit denen sie verbunden seyn können, los zu machen sucht, dergestalt, daß sie sich ganz allein auf der einen Seite, und die andern sich auf den andern Seite, der Gleichung vereinigt befinden.

§. 11.

Wenn nur eine unbekannte Größe in der Aufgabe, und folglich auch nur eine Gleichung da ist, und die unbekannte Größe durch Auflösung der Gleichung abgesondert ist; so enthält die eine Hälfte oder Seite der Gleichung die bekannten Größen, welche den Werth der Unbekannten geben.

Aber wenn die Aufgabe mehrere unbekannte Grössen hat, und folglich auch mehrere Gleichungen davon herleitet, und man eine von diesen unbekannten Größen in einer von diesen Gleichungen, welche man will, absondert, so wird man den Werth dieser Unbekannten, in bekannten und unbekannten Größen haben.

§. 12.

Alle diese verschiedenen unbekannten Größen abzusondern giebt es zwey Methoden: die erste bestehet darinn, daß man den Werth von einer und derselben Unbekannten in jeder Gleichung nimmt und diese Werthe unter sich vergleicht, dieses giebt alsdann neue Gleichungen, in welcher sich die erste Unbekannte nicht mehr befindet; verfährt man eben so mit denn letztern Gleichungen, so kömmt man zur Bestimmung des besondern Werthes jeder Unbekannten.

§. 13.

§. 13.

Nach der zweyten Methode verfährt man so: Man sondert eine der unbekannten Größen, aus einer von denen Gleichungen der Aufgaben ab; diesen Werth setzt man nun in jeder der andern Gleichungen, worinn sie sich befindet, statt ihrer hin; wodurch sie aus ihnen verschwindet; diese letzten Gleichungen haben alsdann eine Unbekannte weniger.

Sondert man nun ferner aus einer dieser letzten Gleichungen eine von den Unbekannten, und substituirt ihren Werth in denen andern, worinn sie sich befindet, so entstehen hieraus Gleichungen, die zwey Unbekannte weniger haben.

Indem man so fort fährt, um nach und nach die andern Unbekannten verschwinden zu lassen, welche sich auch in denen Gleichungen nach denen Substitutionen der Werthe der ersten Unbekannten befinden, so kömmt man zu einer Gleichung, die nicht mehr als eine unbekannte Größe enthält.

Man nimmt den Werth dieser letzten unbekannten Grösse, welcher sich in bekannten Größen ausgedrückt befindet, und setzt ihn an seiner Stelle in die andern besondern Gleichungen, welche sie nebst einer andern Unbekannten enthalten; dieses bringt diese Gleichungen bis zu einer unbekannten, deren Werth man findet, indem man sie von allen andern bekannten Größen absondert.

Diese zwey ersten Unbekannten die gefunden sind, dienen nun auch, indem man auf dieselbe Art verfährt, die dritte Unbekannte zu finden; Mittelst dieser Drey, findet man die Vierte, und so fort bis sie alle bekannt und bestimmt sind.

§. 14.

Wenn man weniger besondere Gleichungen hat, als unbekannte Größen da sind, so ist die Aufgabe unbestimmt,

stimmt, weil man den Werth von keiner dieser Unbekannten, in bekannten Größen finden kann.

§. 15.

Man setze z. B. Eine Aufgabe habe drey unbekannte Größen, und ihre Bedingungen gäben nur zwey Gleichungen; so wird der Werth einer Unbekannten, den man aus der Einen, oder der andern dieser Gleichungen gefunden hat, durch die bekannten und die beyden unbekannten Größen ausgedrückt seyn. Substituiren wir diesen Werth in der andern Gleichung, so wird diese nur noch zwey Unbekannte haben: aber sondert man eine dieser Unbekannten ab, so findet sich die andere immer unter den Größen mitbegriffen, die mit ihr zusammen den Werth von jener unbekannten Größe geben. Daher kann der Werth der beyden ersten unbekannten Größen nur gefunden werden, wenn man die letzte als bekannt annimmt; das heißt, indem man ihr irgend einen Werth beylegt. Da man für sie so viel verschiedene Werthe setzen kan, als man nur will, so hat also auch die Aufgabe eben so viel besondere Solutionen, und folglich ist sie unbestimmt.

§. 16.

Es kann sich treffen, daß, obgleich die Bedingungen einer Aufgabe, eben so viel Gleichungen geben, als sie unbekannte Größen enthält, sie dennoch unbestimmt ist: aber dieser Fall kann nur statt finden, wenn die Aufgabe nicht gut ausgedrückt ist, und wann die nemlichen Bedingungen unter verschiedenen, aber gleich bedeutenten Ausdrücken dargestellt sind.

Man setze z. B. daß man aus einer Ausgabe die drey unbekannte Größen enthält, auch drey besondere Gleichungen ziehe, aber daß, nachdem man diese Glei-

Gleichungen wohl untersucht hat, solche sich auf zwey bringen lassen, so ist klar, daß diese Aufgabe unbestimmt ist, ob sie es gleich anfangs gar nicht zu seyn schien.

Darum muß man, so oft eine Aufgabe unbestimmt ist, die man doch nach allen Anschein für bestimmt hielt, genau auf die Aussage oder den Ausdruck aufmerksam seyn, und man wird alsdann finden, daß einige Umstände, welche man als verschieden angesehen hat, sich vereinigen um die nemlichen Eigenschaften oder den nemlichen Gegenstand zu bezeichnen.

Dieses wäre der allgemeine Begriff, den man sogleich von der analytischen Methode geben könnte, die freylich mehr Entwickelung und Erklärung nöthig gehabt hätte: aber zum Theil ist man schon durch die Aufgaben des ersten Theils dieses Werks in etwas vorbereitet, und zum andern werden die in diesem und dem folgenden Theile vorkommenden Aufgaben gewiß hinlänglich seyn, alles vollkommen zu verstehen und einzusehen.

§. 17.

Von der Auflösung der Gleichungen vom ersten Grade mit einer und mehrern unbekannten Größen.

Die Auflösung der Gleichungen vom ersten Grade, ist gar nicht schwer, und gründet sich auf den im ersten Theile dieser Sammlung algebraischer Aufgaben Seite LXI. §. 66. gegebenen Grundsatz. Ich habe auch bereits dort ein Beyspiel zur Erläuterung gegeben; die jetzt folgenden werden aber die Anwendung dieses Grundsatzes in ein noch hellers Licht setzen.

§. 18.

Gesetzt wir hätten diese Gleichung $x + 7 = y - 3$; und man wollte x finden, oder welches einerley x auf

eine

eine Seite ganz allein haben, so ist klar, daß man linker Hand 7 wegnehmen muß; aber weil alsdann die rechte Seite um 7 größer ist, als die linke Seite, so muß man, um die Gleichheit zwischen beyden Seiten zu erhalten, auf rechter Hand 7 von y - 3 abziehen, dieses geschiehet, indem man zu y - 3, die Zahl 7 mit den Zeichen (-) hinzufügt, und man hat alsdann $x = y - 3 - 7 = y - 10$.

Will man y aus der Gleichung finden, so muß sie auch ganz allein auf einer Seite bleiben; dieserwegen, muß man - 3 womit sie verbunden ist, abziehen oder wegnehmen; aber wenn man - 3 von dieser Hälfte der Gleichung verschwinden läßt, so ist das so viel, als hätte man sie um 3 vermehrt, um also die Gleichheit zwischen beyden Hälften der Gleichung zu erhalten, muß man auch die andere Hälfte $x + 7$, um 3 vermehren, und man hat alsdann $x + 7 + 3 = x + 10 = y$.

§. 19.

Hieraus siehet man, daß die Gleichheit, bey einer Gleichung nicht gehoben wird, wenn man auf beyden Seiten der Gleichung gleiches addirt oder subtrahirt, und daß man hierdurch jedes Glied der Gleichung von einer Seite zur andern bringen kann. Wir haben dieses auch hinlänglich bey den Aufgaben im ersten Theile dieses Werks gesehen, darum wollen wir hier nur noch zur leichtern Ausübung folgende Regel die ganz aus dem vorhergehenden folgt, hersetzen.

Um ein oder mehrere Glieder von einer Seite der Gleichung zur andern zu bringen, oder zu versetzen, hat man nur nöthig die Zeichen dieser Glieder zu verwandeln, daß heißt, wenn eine Größe das Zeichen (+) hat, so muß man ihr das Zeichen (−) geben, hat sie aber dieses letztere, so muß man ihr das erstere geben, und diese,

Größ-

Größen mit den verwandelten Zeichen, auf die andere Seite setzen.

Denn eine Größe die das negative Zeichen hat, oder eine negativ ausgedrückte Größe subtrahiren, heißt, diejenige Größe, wenn sie subtrahirt werden soll, um sich selbst vermehren. Z. B. $x + a - cb = y + mp$, um hier in dieser Gleichung x allein zu haben, so setzt man nach der Regel $+ a - cb$ mit den entgegengesetzten Zeichen auf die andere Seite, und man erhält $x = y + mp - a + cb$.

§. 20.

Wenn man in einer Gleichung alle Glieder der einen Hälfte auf die andere Seite hin versetzt, so ist klar, daß auf der einen Seite alle Glieder und auf der andern Null ist.

Z. B. $5x - 6a = 7y + 3c - 9$, so ist, wenn man $7y + 3c - 9$ auf die andere Seite hin versetzt:

$$5x - 6a - 7y - 3c + 9 = 0.$$

Anmerk. Dieses nennt man eine Gleichung auf Null reduciren, und wird bey höhern Gleichungen sehr häufig gebraucht.

§. 21.

Bisher war um eine Größe in einer Gleichung auf einer Seite allein zu haben, bloß Addition und Subtraktion, oder bloße Versetzung mit entgegengesetzten Zeichen nöthig, aber wir haben schon unter den Aufgaben im ersten Theile dieses Werks viele gehabt, deren Gleichung so beschaffen war, daß um die unbekannte Größe auf einer Seite allein zu haben, auch Multiplication und Division angewandt werden mußte, und dieses geschiehet allemal sobald die gesuchten Größen mit andern Größen multiplicirt oder dividirt sind.

Wir

Wir wollen damit anfangen, zu zeigen, wie man die Brüche aus der Gleichung schaft.

22.

Es sey die Gleichung $\frac{x}{a}+\frac{b}{c}=\frac{y}{d}-\frac{a}{g}$ gegeben aus der man die Brüche schaffen soll.

Um dem ersten Nenner a verschwinden zu lassen, so muß man alle Glieder der Gleichung durch diese Größe multipliciren, und man hat alsdann $x+\frac{ab}{c}=\frac{ay}{d}-\frac{a^2}{g}$

Um den zweyten Bruch c verschwinden zu lassen, so muß man alle Glieder mit c multipliciren, und man erhält $cx+ab=\frac{acy}{d}-\frac{a^2c}{g}$.

Man wird auf eben die Art alle Glieder, mit d, und endlich mit g multipliciren, und erhält alsdann: $cdgx+abdg=acgy-a^2cd$, worinn sich keine Brüche mehr befinden.

§. 23.

Dieses ganze Verfahren gründet sich darauf, daß man immer auf beyden Seiten der Gleichung alle Glieder mit einerley Größe multiplicirt, so müßen auch die daher entstehenden Producte, das heißt die Hälften der Gleichung immer einander gleich bleiben.

§. 24.

Bemerkung.

Es ist klar, daß statt nach und nach die Gleichung mit einem Nenner zu multipliciren, man um diese Operation abzukürzen, sogleich jedes Glied mit dem Produkt der übrigen Nenner, der Gleichung multipliciren kann.

§. 52.

§. 25.

Z. B. Man hätte $\frac{a^2}{c} + b + \frac{cx}{2} = \frac{b^2}{a} - c + - \frac{dy}{3}$, und man wünscht die Brüche verschwinden zu laßen, so darf man nur überlegen, daß jedes ganze Glied als b u. c, als ein Bruch angesehen werden kann, deßen Nenner die Einheit wäre, und da die Einheit als Multiplicator, die Größen nicht verändert, so multiplicirt man die Zähler a^2 des ersten Gliedes der linken Seite mit dem Producte der von der Einheit unterschiedenen Nenner, das heißt, $2.a.3 = 6a$; das folgende Glied mit $c.2.a.3 = 6ac$; alsdann den Zähler cx, mit $c.a.3 = 3ac$; ferner den Zähler b^2, mit $c.2.3 = 6c$; c mit $c.2.a.3 = 6ac$, und endlich dy mit $c.2.a = 2ac$. die daher entstandene Gleichung wird seyn.

$$6a^3 + 6abc + 3ac^2x = 6b^2c - 6ac^2 + 2acdy.$$

§. 26.

Durch dieses Verfahren, verschwinden in einer Gleichung alle Brüche, allein nun ist die unbekannte Größe mit andern Größen multiplicirt, nemlich mit den Nennern der Brüche, die sich in der Gleichung befanden, und vielleicht noch ausserdem mit andern, die sie vorher schon zu Coefficienten hatte. Es frägt sich, wie man die unbekanne Größe wieder davon befreyen wird.

§. 27.

Es sey die Gleichung aus §. 22 gegeben, man soll x auf eine Seite ganz allein bringen.

Es ist; $cdgx + abdg = acgy - a^2cd$.

Um x zu befreyen, so muß man abdg auf die rechte Seite hin versetzen, nach der §. 19. gegebenen Regel, dieses giebt $cdgx = acgy - a^2cd - abdg$; nun dividire man auf beyden Seiten mit cdg, so erhält man

$$x = \frac{acgy - c^2da - abdg}{cdg}$$

Wollte

Wollte man y aus der nemlichen Gleichung entwickeln, so würde, nachdem man $-a^2cd$ nach der andern Seite hin versetzt hätte, $cdgx + abdg + a^2cd = acgy$ entstehen, oder indem man beyde Hälften versetzt, und mit acg dividirt, so erhält man $y = \frac{cdgx + abdg + acd}{acg}$

§. 28.

Um x aus der Gleichung §. 25. zu entwickeln, verfahre man so; diejenigen Glieder linker Hand, worinn sich x nicht befindet, versetze man nach der rechten Hand hin. Also bekommen wir aus $6a^3 + 6abc + 3ac^2x = 6b^2c - 6ac^2 + 2acdy$, folgende Gleichung: $3ac^2x = 6b^2c - 6ac^2 + 2acdy - 6a^3 - 6abc$. Nun dividire man noch jede Seite mit $3ac^2$, so findet sich:

$$x = \frac{6b^2c - 6ac^2 + 2acdy - 6a^3 - 6abc}{3ac^2} =$$

$$= \frac{2b^2}{ac} - 2 + \frac{2dy}{3c} - \frac{2a^2}{c^2} - \frac{2b}{c};$$

Eben so findet sich $y = \frac{6a^3 + 6abc + 3ac^2x - 6b^2c + 6ac^2}{2acd}$

oder wenn man jedes Glied auf seinem einfachsten Ausdruck reducirt; $y = \frac{3a^2}{cd} + \frac{3b}{d} + \frac{3cx}{2d} - \frac{3b^2}{ad} + \frac{3c}{d}$.

§. 29.

Aus den zwey vorhergehenden Gleichungen, von denen wir die Brüche verschwinden liessen, und nachher die unbekannten Größen zu entwickeln suchten, können wir leicht den Gebrauch sehen, welchen wir zu diesen Behuf von der Addition, Subtraction, Multiplikation und Division, machen.

Durch die Multiplikation, schaft man alle Brüche aus der Gleichung; durch die Versetzung, (transposition), oder durch Hülfe der Addition und der Subtraktion

tion, bringt man alle Glieder zusammen, welche die unbekannte Größe enthalten, und durch die Division befreyet man sie von allen Größen, durch welche sie multiplicirt ist, dergestalt, daß sie sich allein auf einer Seite der Gleichung befindet, und ihr Werth ist durch die andere Hälfte ausgedrückt.

§. 30.

In beyden Gleichungen, von denen wir so eben das Detail der Auflösung gegeben haben, befanden sich die unbekannten Größen, jede nur in einem Gliede der Gleichung, es kömmt nur darauf an zu zeigen, wie wir verfahren müssen, wenn die unbekannte Größe in mehrern Gliedern sich befindet.

§. 31.

Exempel mögen es zeigen. Es sey die Gleichung $\frac{a^2x}{b-c} + dc = bx - ac$ gegeben, man will x entwickeln.

Der Anfang muß durch Wegschaffung des Bruchs $\frac{a^2x}{b-c}$ gemacht werden, welches geschiehet, wenn man alle Glieder mit $b - c$ multiplicirt; hierdurch erhält man:

$$a^2x + bdc - c^2d = b^2x - bcx - abc + ac^2.$$

Nun muß man ferner alle diejenigen Glieder worin sich x befindet, auf einer Seite vereinigen, und auf der andern Seite alle diejenigen Glieder, worin x sich nicht befindet; dieses giebt $a^2x + b^2x + bcx = -abc + ac^2 - bcd + c^2d$.

Nun wird man leicht einsehen, daß die linke Seite der Gleichung ein Produkt aus $a^2 - b^2 + bc$ und x ist; daher auch $(a^2 - b^2 + bc)\,x = -abc + ac^2 - bcd + c^2d$. Dividirt man nun mit $a^2 - b^2 + bc$ auf beyden Seiten, so findet man: $x = \frac{ac2 - abc - bcd + c2d}{a2b - b2 + bc}$

 §. 32.

§. 32.

Hätte man $ax + bx = a^2 - b^2$, so folgt:

$$(a + b)x = a^2 - b^2$$

und $$x = \frac{a2 - b2}{a + b} = \frac{(a+b)(a-b)}{a+b} = a - b$$

§. 33.

Wenn man aus einer Gleichung die zwey unbekannte Größen hat, als: $cx + dy = b^2$, eine der unbekannten Größen etwa x entwickelt, so hat man $x = \frac{b2 - dy}{c}$; aber y rechter Hand ist ja nicht bekannt, daher der Ausdruck $\frac{b2 - dy}{c}$, x nicht geben kann.

Gesetzt aber die Bedingungen der Aufgabe, aus welcher die vorhergehende Gleichung entspringt, geben auch $x + y = a$, so findet sich hier $x = a - y$. Da nun x in der einen Gleichung denselben Werth hat, als in der andern, so folgt daß $\frac{b2 - dy}{c} = a - y$; eine Gleichung, worinn nur eine unbekannte Größe y ist, wenn diese bekannt wäre, so giebt sie von a abgezogen den Werth von x.

y zu haben verfährt man so:

es ist $\frac{b2 - dy}{c} = a - y$

mit c auf beyden Seiten multiplicirt,

giebt $b^2 - dy = ca - cy$

Ist nun c größer als d, so addirt man auf beyden Seiten $+ cy$, wäre aber $c < d$, müßte man $+ dy$ addiren; wir wollen das erstere annehmen, so erhalten wir:

$$b^2 + cy - dy = ca \quad b^2 \text{ subtrahirt,}$$

$$(c-d)y = ca - b^2 \quad \text{mit } c-d \text{ dividirt,}$$

giebt $y = \frac{ca - b^2}{c-d}$

§. 34.

Bemerkung.

Warum man darnach sehen muß, ob c größer oder kleiner als d ist, geschiehet bloß, um den Werth von y positiv zu finden.

§. 35.

Um nun jetzt den Ausdruck für den Werth von x zu haben, so muß man den gefundenen Ausdruck für y in eine von den beyden gegebenen Gleichungen substituiren. Substituirt man ihn in der Gleichung $cx + dy = b^2$, so muß man, da sich hier y in d multiplicirt befindet, auch seinen Werth gleichfalls mit d multipliciren, und diese Gleichung wird alsdann folgende seyn:

$$cx + d \times \frac{ac - b^2}{c - d} = b^2 \quad \text{mit } c-d \text{ multiplicirt}$$

giebt $(c-d)cx + acd - db^2 = b^2c - db^2$
$+ acd - db^2$ subtrahirt

kommt $(c-d)cx = b^2c + - acd$ mit $(c-d)c$ dividirt.

giebt $x = \frac{b^2c + - acd}{(c-d)c} = \frac{b^2 - ad}{c-d}$

Anstatt den Werth für y in der Gleichung $cx + dy = b^2$ zu substituiren, so substituirt man sie in dieser $x + y = a$, und man hat alsdann $x + \frac{ac - b^2}{c - d} = a$

 oder

oder $x = a - \frac{ac - b^2}{c - d} = \frac{-ad - (-b^2)}{c - d} = \frac{b^2 - ad}{c - d}$

also sind die beyden Werthe der unbekannten Größen gefunden worden.

§. 36.

Um den Werth der beyden unbekannten Größen der Gleichungen $cx + dy = b^2$, und $x + y = a$ durch die zweyte Methode (§. 13) zu bestimmen, so nimmt man sogleich den aus der ersten Gleichung gefundenen Werth für x, und substituirt ihn an seiner Stelle in der andern Gleichung; dieses macht, daß sie aus dieser Gleichung verschwindet, die, da sie nun nicht mehr, als eine unbekannte hat, sehr leicht resolvirt werden kann.

Die ganze Procedur stehet so:

aus $cx + dy = b^2$ erhält man $x = \frac{b^2 - dy}{c}$

Nun ist $x + y = a$; also auch

$$\frac{b^2 - dy}{c} + y = a,$$

und hieraus findet sich endlich

$y = \frac{ac - b^2}{c - d}$, wie nach der ersten Methode.

Daher kann man sich mit gleichem Vortheil der einen oder der andern Methode bedienen, um Gleichungen, die mehr als eine unbekannte Größe haben, aufzulösen.

§. 37.

Ich will hier noch einer Methode gedenken, die öfters sehr vortheilhaft angewandt werden kann.

Man multiplicire die eine Gleichung mit einem Faktor, der als Coefficient in der andern Gleichung bey der zu eliminirenden oder wegzuschaffenden Größe stehet, und ziehe alsdann diese Gleichung von der ersten ab, so erhält man eine Gleichung, worinn nur noch eine unbekannte Größe enthalten ist.

Es

Es sey z. B. $cx + dy = b^2$ und $x + y = a$, und es sollte x eliminirt werden,

so ist: $c(x+y) = cx + cy = ca$ subtrahirt

$$dy - cy = b^2 - ca$$
$$(d-c)y = b^2 - ca$$
$$y = \frac{b^2 \; ca}{d-c}$$

Sollte y eliminirt werden, so müßte man $x + y = a$ mit d multipliciren, und alsdann dieses Product von der andern Gleichung abziehen, so bekäme man eine Gleichung, worinn nur x enthalten ist, welche man alsdann nach denen schon bekannten Methoden finden würde.

§. 38.

Anmerk. Diese Methode hat große Vorzüge, vor den beyden vorhergehenden, wie es in der Folge mit mehrern erhellen wird.

§. 39.

Wenn die besondern Bedingungen einer Aufgabe drey Gleichungen geben, als $x + y + z = a$; $x + y - z = b$ und $x + z - y = c$, in welchen x, y und z unbekannte Grössen sind.

Da diese Aufgabe eben so viele Gleichungen giebt, als sie unbekannte Größen enthält, so ist sie bestimmt.

Aus der ersten Gleichung findet sich $x = a - y - z$. Setzt man diesen Werth von x in die beyden andern, so verwandelt sich die zweyte Gleichung in $a - y - z + y - z = b$, oder $a - 2z = b$; hieraus ziehet man $z = \frac{a-b}{c}$, und die dritte Gleichung wird nach der obigen Substitution seyn $a - y - z - y + z = c$; oder $a - 2y = c$, mithin $a - c = 2y$, folglich $y = \frac{a-c}{2}$.

Substituiren wir gegenwärtig, die für z und y gefundenen Werthe, in dem aus der ersten Gleichung für x

gefundenen Werth, so wird man haben $= a - \frac{a+c}{2} - \frac{a+b}{2}$ und also indem man die Brüche wegschaft

$2x = 2a - a + c - a + b$, welches sich auf $2x = b + c$ reducirt, und also $x = \frac{b+c}{2}$

Also , , $x = \frac{b+c}{2}$

$y = \frac{a-c}{2}$

und $z = \frac{a-b}{2}$

§. 40.

Aber man verfahre, um hier den Werth der unbekannten Größen zu bestimmen folgender Gestalt.

Ziehe die zweyte Gleichung von der erstern ab, so fallen hier sogleich die beyden unbekannten Größen x und y weg und es kömmt $2z = a - b$ daher $z = \frac{a-b}{2}$; Nun ziehe die dritte Gleichung von der ersten ab, so fallen x und z weg, und es bleibt $2y = a - c$, folglich $y = \frac{a-c}{2}$; Ferner addire die zweyte und dritte Gleichung, so fallen dadurch y und z weg, und es ergiebt sich $2x = b + c$, mithin $x = \frac{b+c}{2}$.

Anmerk. Diese Auflösung ist offenbar der erstern vorzuziehen, nur ist chade, daß ich keine allgemeine Regel angeben kann, wie man in jedem Falle den kürzesten Weg trift, alles beruht hier auf Uebung und Einsicht des Algebraisten.

§. 42.

Wenn die aufzulösenden Aufgaben mehr als drey unbekannte Größen haben, und ihre Bedingungen auch immer

immer eben so viele besondere Gleichungen geben, so wird man den Werth von jeder unbekannten Größe, nach der im §. 39. enthaltenen Methode bestimmen können.

§. 43.

Gesetzt die Bedingungen einer Aufgabe, welche vier unbekannte Größen enthält, gäbe die folgenden vier Gleichungen, in welchen u, x, y, und z, die unbekannten Größen sind:

1) $u + x + y - z = a$

2) $u + x + z - y = b$

3) $u + y + z - x = c$

4) $x + y + z - u = d.$

So nimmt man den Werth einer dieser unbekannten Größen, z. B. von u, in jeder Gleichung, und man wird haben:

1) $u = a - x - y + z$

2) $u = b - x - z + y$

3) $u = c - y - z + x$

4) $u = x + y + z - d.$

Vergleicht man hier die beyden ersten Werthe von u mit einander, so hat man:

5) $a - x - y + z = b - x - z + y$

in welcher sich u nicht mehr befindet.

Vergleicht man eben so die beyden letzten Werthe, so geben sie

6) $c - y - z + x = x + y + z - d$

Aus No. 5. folgt $2z = 2y - a + b$

Aus No. 6. folgt $2z = - 2y + + c + d$

dieses giebt wiederum

$$2y - a + b = - 2y + c + d$$

woraus sich $y = \frac{a - b + c + d}{4}$ findet.

Substituirt man diesen Werth von y in einem oder dem andern für 2z gefundenem Werthe, so ergiebt sich zum Beyspiel, in dem ersten Werthe

$$2z = \frac{a - b + c + d}{2} - a + b$$

und also $z = \frac{- a + b + c + d}{4}$

Nimmt man nun jetzt zwey Werthe von y oder von z in den ersten Gleichungen, wo u sich nicht mehr befindet, (diese Werthe werden weiter keine unbekannte Größen als x und y oder z haben,) und substituirt die daraus entstehende Gleichung den Werth von y oder von z, so wird sie bis zu einer unbekannten Größe x reducirt seyn, deren Werth man alsdann leicht findet.

Substituirt man endlich in einer von denen Gleichungen, welche den Werth von u bestimmen, den bereits gefundenen Werth der unbekannten Größen x, y und z, so wird man den Werth der vier unbekannten Größen von der bestimmten Aufgabe haben.

Man findet $x = \frac{a + b - c + d}{4}$

und $u = \frac{a + b + c - d}{4}$

Man würde dieselben Werthe, auch nach §. 13. finden.

§. 44.

Anmerk. Wenn es sich treffen sollte, daß bey der Vergleichung der Werthe, einer und eben derselben unbekannten Größe, die man aus den verschiedenen Gleichungen der Aufgabe genommen hat, in der neuen daraus entstehenden Gleichung, beyde Hälften ganz gleich sind, nemlich

beyde

beyde Hälften aus gleich viel und gleichen Gliedern mit gleichen Zeichen bestehen; so ist klar, daß diese Gleichung gar keinen Werth bestimmt. Es fällt alsdann eine Gleichung weg, wenn die Aufgabe wirklich eine oder mehrere unbekannte Größen mehr enthält, als ihre Bedingungen von einander verschiedene Gleichungen geben, so ist die Aufgabe unbestimmt.

§. 45.

Ehe ich zeige, wie man die Werthe der unbekannten Größen, aus denen Gleichungen §. 43. noch auf eine bequemere und sinnreichere Art findet, so will ich hier erst einen, für die Analysis sehr wichtigen Satz mittheilen.

§. 46.

Aus der Summe und Differenz zweyer Zahlen findet sich die größte, wenn man zu der halben Summe die halbe Differenz addirt; die kleinste, wenn man von der halben Summe, die halbe Differenz, subtrahirt.

Beweis.

Es sey die Summe zweyer Zahlen x und y gleich s und die Differenz gleich d, so ist offenbar:

1) $x + y = s$; und wenn x größer als y

auch 2) $x - y = d$

addirt

giebt $2x = s + d$

folglich $x = \frac{s}{2} + \frac{d}{2}$ die größte.

Wird No. 2. von No. 1. subtrahirt, so kommt

$2y = s - d$

folglich $y = \frac{s}{2} - \frac{d}{2}$ die kleinste.

§. 47.

Durch die Addition und Subtraktion fanden wir hier x und y sehr bequem, die bekannte gewöhnliche Methode würde nicht so geschwind die Werthe geben. Aber noch mehr, die gegebene Auflösung stimmt mit der Art, wie die Alten dergleichen Aufgaben aufzulösen pflegten, so ganz überein, daß es vielleicht Vielen meiner Leser gefallen wird, hier die Uebereinstimmung zu lesen.

Nach Art der Alten müßten wir, um aus der gegebenen Summe und Differenz zweyer Zahlen, die Zahlen selbst zu finden, folgendermaßen schließen.

Die Summe entstehet, wenn ich beyde Zahlen zusammen addire, also bestehet sie aus der größern und kleinern Zahl.

Die Differenz entstehet, indem ich die kleinere von der größern Zahl subtrahire, also bestehet die größere Zahl aus der kleinern und der Differenz.

Addire ich nun die Differenz zur Summe, so erhalte ich offenbar ein Agregat, welches aus der größern, der kleinern Zahl und der Differenz bestehet, folglich das Zweyfache der größern Zahl, und daher brauch ich nur mit 2 in dieses Agregat zu dividiren, oder welches einerley ist, jeden Theil, nemlich die Summe und die Differenz durch 2 dividiren, um die größere Zahl zu haben.

Subtrahire ich aber die Differenz von der Summe, so bleibt unstreitig das Zweyfache der kleinern Größe, und daher dividire ich mit 2 in diesen Rest, oder in dessen Theile, um die kleinere Zahl zu haben.

Diese Schlüsse stimmen ganz genau mit unsern gemachten algebraischen überein, letztere haben noch den Nachtheil, daß man das Gesuchte, fast ganz mechanisch findet, was nach der Methode der Alten nicht geschiehet, nur sind ihre Methoden selten kurz, und in sehr zusammen-

mengesetzten Fällen äusserst weitläuftig, schwer oder vielleicht gar unmöglich, indem wir die Menge verketteter Schlüsse nicht mehr überschauen können, und hier unterstützt uns die Algebra, und hilft uns da noch fort, wo jede andere bekannte Methode uns verläßt.

Es ist gewiß, daß ihre Methoden eben so weit reichen, als unsere algebraischen, nur fodern sie weit mehr Kopf und Fleis, als vielleicht je ein Mensch seiner Natur nach haben kann; überdem siehet man jetzt fast mehr auf die praktischen Vortheile, die erreicht werden sollen, und legt eben keinen großen Werth auf blosse Speculationen, die nur für die Metaphysik, nicht für das gemeine leben gehören.

§. 48.

Anmerk. Mittelst des §. 46. gelehrten Satzes, können eine Menge Aufgaben, die im ersten Theile dieses Werks stehen, ganz leicht ohne Algebra aufgelößt oder gerechnet werden, nur muß man die Einkleidung der Aufgabe nicht zum Wesentlichen derselben rechnen. Beobachtet man dieses, so wird man im ersten Theile Seite 12 und 13, gleich 4 Aufgaben finden, worinn alles immer nur darauf ankam, aus der Summe und Differenz zweyer Zahlen, die Zahlen selbst zu finden.

§. 49.

Jetzt wollen wir nun diesen Satz zur Auflösung der Gleichungen §. 43. anwenden.

Man addire No. 1 und 2, so kömmt:

$$2u + 2x = a + b$$

Man subtrahire No. 3 und 4, von einander, so erscheint

$$2u - 2x = c - d$$

Nun

Nun ist nach §. 46, $2u = \frac{a+b}{2} + \frac{c-d}{2}$

also $u = \frac{a+b+c-d}{4}$

ferner nach §. 46, $2x = \frac{a+b}{2} - \left(\frac{c-d}{2}\right)$

folglich $x = \frac{a+b+d-c}{2}$

Eben so findet sich, wenn man No. 1 und 2, von einander subtrahirt:

$$2y - 2z = a - b.$$

ferner, No. 3 und 4 addirt, giebt:

$$2y + 2z = c + d.$$

Also nach §. 46. $2y = \frac{a-b}{2} + \frac{c+d}{2}$

und $2z = \frac{c+d}{2} - \left(\frac{a-b}{2}\right)$

folglich $y = \frac{a-b+c+d}{4}$ und $x = \frac{c+d-a+b}{4}$

§. 50.

Diese Auflösung ist von mir, und wird schwerlich bequemer aufgelößt werden können, auch stimmt wiederum diese algebraische Auflösung ganz mit der Auflösungsmethode der Alten überein. Die Weitläuftigkeit, worinn nothwendig eine schriftliche Auflösung, nach Methode der Alten hier führen muß, verhindert mich, sie mitzutheilen; indessen ist sie nicht schwer, und ich rathe Anfängern, welchen die Bildung ihres Verstandes interessirt, sie allein zu versuchen, und die Lehrer ersuche ich, ihre, ihnen anvertraute Eleven dazu anzuhalten, weil wol keine Sache mehr den Verstand schärft, und zugleich durch ihr Vergnügen, so belohnt, als dieses.

§. 51.

Ich endige hier die Lehre von denen bestimmten Gleichungen des ersten Grades, und werde gelegentlich bey den in diesen und folgenden Theile vorkommenden Aufgaben, noch manche Kunstgriffe beybringen, welche die Auflösungen ungemein verkürzen werden. Jetzt will ich von den Verhältnissen und Proportionen etwas vollständiger handeln, als im ersten Theile dieses Werks, Seite LIX. §. 63 geschehen ist.

§. 52.

Von den Verhältnissen überhaupt.

Wenn wir Größen von einerley Art mit einander vergleichen, oder ihr Verhältniß gegen einander bestimmen wollen; so kann dieses, wie wir leicht gewahrnehmen, nur auf zweyerley Art geschehen.

Denn entweder können oder wollen wir bestimmen, um wie viel Einheiten die eine Zahl größer oder kleiner, als die andere ist, oder wie vielmal die Eine oder ein **adequater** (gleicher) Theil derselben, in der andern enthalten sey.

Die erste Vergleichung giebt ihr **arithmethisches Verhältniß**, (ratio arithmetica). Durch die zweyte Art der Vergleichung erhält man ihr **geometrisches Verhältniß**, (ratio geometrica).

Z. B. Das arithmetische Verhältniß von 15 zu 3, wird durch 12, als den Unterschied beyder Zahlen angegeben, und wird durch Zeichen so ausgedrückt: $15 - 3 = 12$.

Hingegen erhält man das geometrische Verhältniß dieser Zahlen, wenn man die eine Zahl durch die andere, oder durch einen adequaten Theil derselben dividirt: also $\frac{15}{3} = 5$ oder $\frac{3}{15} = \frac{1}{5}$; bestimmen das geometrische Ver-

Verhältniß dieser Zahlen, denn es zeigt an, daß 15 fünf mal größer ist als 3, oder 3 nur $\frac{1}{5}$ von 15 ist; auch erforscht man das geometrische Verhältniß, wenn ich sage, $\frac{1}{5}$ von 15, ist in der andern Zahl 3, grade einmal enthalten. Sie wird in Zeichen so geschrieben, $15:3=5$.

§. 53.

Anmerk. Warum die eine Art der Vergleichung das arithmetische Verhältniß, die andere das geometrische Verhältniß genannt wird, läßt sich nicht aus Gründen einsehen; beyde werden in der Arithmetik sowol, als in der Geometrie gebraucht. Die Alten verstanden unter Verhältniß keine andern als die geometrischen, nur die Neuen haben diesen Begrif auch auf die arithmetische Vergleichung zweer Zahlen, ausgedehnt. Daher pflegt man noch allemal das geometrische Verhältniß zu verstehen, wenn dieses Wort, ohne eines von beyden Beywörtern gesetzt wird.

§. 54.

Aus der Art, wie man das Verhältniß zweer Zahlen schreibt, §. 52. erhellet, daß eine Zahl, welche man will, zur linken, die andere ihr zur rechten steht. Diese Zahlen nennt man die Glieder des Verhältnisses, und man kann daher in jedem Verhältniß ein Glied als das **vorhergehende** (antecedens terminus), und das andere als das **folgende** (consequens) ansehen.

§. 55.

Von den arithmetischen Verhältnissen insbesondere.

Es seyn a und b Größen einer Art, so ist nach §. 52. ganz allgemein $a-b$ der Ausdruck für das arithmeti-

sche

sche Verhältniß beyder Größen; und man kann allemal $a - b = \pm d$ finden, wo das obere Zeichen gilt, wenn a größer, und das untere, wenn a kleiner ist, als b, und dabey ist offenbar d mit a und b von einerley Art oder gleichartig. Laßen wir nun unbestimmt, ob d positiv oder negativ sey, so ist unter der angeführten Bedingung allemal:

$$a - b = d, \text{ und folglich auch}$$

$$b + d = a; \quad b = a - d; \quad \text{und } b - a = -d.$$

Da man also zwo gleichartige Größen immer von einander subtrahiren kann, so kann man auch dieselben allemal in arithmetischen Verhältnisse betrachten. Ferner erhellet aus obigen, und auch aus der Addition entgegengesetzter Größen, daß man die Differenz dieser Größen, welche auch die Differenz ihres arithmetischen Verhältnisses heißt, wenn man das nachfolgende Glied negativ nimmt, und darauf beyde Glieder nach algebraischer Art addirt. Auch ist allemal das vorhergehende Glied die Summe des nachfolgenden Gliedes und der Differenz, so wie das nachfolgende Glied der Unterschied zwischen der Differenz und dem vorhergehenden Gliede ist. Endlich verwandelt sich die Differenz des Verhältnisses in die entgegengesetzte Größe, wenn man das nachfolgende Glied zum vorhergehenden macht, ohne ihre Größe zu verändern.

§. 56.

Wenn $a - b = d$ ist, so ist

1) $(a + c) - b = d + c$
2) $a - (b - c) = d + c$
3) $a - (b + c) = d - c$
4) $(a - c) - b = d - c$
5) $(a \pm c) - (b \pm c) = d$

No. 1 und 2 heißt in Worten ausgedrückt:

Die Differenz des Verhältnisses wird um eben so viel vergrößert, um so viel das vorhergehende Glied zu, oder das nachfolgende abnimmt.

No. 3 und 4 heißt:

Die Differenz des Verhältnisses nimmt um eben so viel ab, um so viel das nachfolgende Glied zu, oder das vorhergehende abnimmt.

No. 5. sagt:

Die Differenz des Verhältnisses bleibt unverändert, man mag zu beyden Gliedern des Verhältnisses gleiches addiren, oder subtrahiren.

Wir sehen, daß wir durch leichte Veränderungen obiger Gleichungen Lehrsätze herleiten können, und es ist nicht schwer, aus denselben Regeln für bestimmte Veränderungen, der arithmetischen Verhältnisse zweyer Größen herzuleiten, so wie auch ihre Anzahl mit geringer Mühe vermehrt werden kann.

§. 57.

Wenn $a-b=d$ ist, so ist $a=b+d$, und $b=a-d$, desgleichen $b-a=-d$. Jedes arithmetische Verhältniß $a-b$ kann daher durch $(b+d)-b$, oder $a-(a-d)$, und wenn man d negativ nimmt, oder die Differenz auf die Art sucht, daß man das vorhergehende Glied von dem nachfolgenden abzieht, durch $a-(a+d)$ ausgedruckt werden.

Mittelst dieser Construktionen des arithmetischen Verhältnisses, kann man sich augenscheinlich von der Wahrheit der im vorhergehenden §. enthaltenen Sätze überzeugen, die man auch ohne dies bald einsieht. Grössern Nutzen aber wird der Gebrauch derselben, in der Folge gewähren.

§. 58.

§. 58.

Von den geometrischen Verhältnissen insbesondere.

Wenn wir fragen, wie groß eine Sache sey, und dabey verlangen, daß man uns die Größe der Sache durch Worte bekannt machen solle, ohne sie selbst vorzuzeigen, so verlangen wir eigentlich ihr geometrisches Verhältniß, mit einer uns bekannten Größe zu wissen. Z. B. Wer die Größe eines Berliner Scheffels von mir zu wissen verlangt, dem muß ich entweder den Scheffel selbst vorzeigen, oder ich muß die Größe desselben mit einer andern ihm bekannten Größe vergleichen und anzeigen, wie groß die Größe des Scheffels gegen diese ihm bekannte Größe sey. Sage ich: der Scheffel enthalte eben so viel als vier Viertel; so setze ich voraus, daß der Fragende die Größe eines Viertels kenne; sonst müßte er weiter fragen, wie groß ist denn ein Viertel?

§. 59.

Um zwey Größen mit einander geometrisch vergleichen zu können, müssen sie einerley Art seyn: Wären nun a und b gleichartige Größen, a das vorhergehende, und b das nachfolgende Glied eines geometrischen Verhältnisses, so ist allemal

$$1)\ a : b = \frac{a}{b} = e$$

e ist hier der Nahme des geometrischen Verhältnisses so wie d in §. 55. den Nahmen des arithmetischen Verhältnisses bedeutet; man nennt auch e den Exponenten des Verhältnisses.

Aus $\frac{a}{b} = e$, folgt $2)\ a = be$;

und $3)\ b = \frac{a}{e}$; auch $4)\ \frac{b}{a} = \frac{1}{e}$.

Aus No. 1. erhellet, daß wir den Exponenten durch die Division des vorhergehenden Gliedes durch das nachfolgende finden. No 2. zeigt, daß wir das vorhergehende Glied aus dem nachfolgenden finden, wenn wir solches mit dem Exponenten multipliciren; ferner zeigt No. 3. daß das nachfolgende Glied gefunden wird, wenn wir das vorhergehende durch den Exponenten dividiren.

Endlich No. 4 zeigt: daß sich der Exponent, aus einem Multiplicator, in einen gleich großen Divisor, und umgekehrt verwandelt, wenn man die Glieder des geometrischen Verhältnisses verwechselt, das heißt, wenn man das vorhergehende Glied zum nachfolgenden, und dieses zum vorhergehenden macht.

§. 60.

Man kann also statt $a : b = e$, allemal schreiben $be : b$, oder $a : \frac{a}{e}$, und wenn man $\frac{1}{e} = m$ setzt, $a : am$ schreiben.

§. 61.

Wenn $a : b = e$ ist, so ist auch $aq : bq = e$, weil $\frac{a}{b} = \frac{aq}{bq}$ ist; auch ist $\frac{a}{q} : \frac{b}{q} = e$, weil $\frac{a : q}{b : q} = \frac{a}{b}$ ist; dahingegen ist $qa : b = qe$, weil $\frac{qa}{b} = q\frac{a}{b} = qe$ ist; auch ist $a : qb = \frac{e}{q}$, weil $\frac{a}{qb} = \frac{a}{b} : q = e : q = \frac{e}{q}$ ist.

Ferner da $\frac{a}{b} + n = e + n = \frac{a + bn}{b}$ ist, so ist auch $a + nb : b = e + n$, also ist $a + b : b = e + 1$; $a + 2b : b = e + 2$ u. s. w. $n + \frac{b}{q} = n + \frac{1}{e} = \frac{na+b}{a} = \frac{ne+1}{e}$ so ist $na + b : a = \frac{ne+1}{e}$, und also auch $a : na + b = \frac{e}{ne+1}$, weil $\frac{na+b}{a} = \frac{ne+1}{e}$ auch $\frac{a}{na+b} = \frac{e}{ne+1}$ ist.

Also

Also ist $a:a+b = \frac{e}{e+1}$; $a2:a+b = \frac{e}{2e+1}$ u. s. w.

Diese Sätze können auch sehr leicht bewiesen werden, wenn man überall statt a, be setzt. §. 60. Nemlich ich behaupte es sey $a+nb:b = e+n$; dies giebt $\frac{a+nb}{b} = e+n$ oder da $a = be$, so ist auch $\frac{be+bn}{b} = e+n$ welches offenbar richtig ist.

Eben so ist $a:na+b = \frac{e}{ne+1}$, den $a:na+b = \frac{a}{na+b} = \frac{be}{nbe+b} = \frac{b\,e}{b\,(ne+1)} = \frac{e}{ne+1}$. Aus ähnlichen Gründen ist auch $a-nb:b = e-n$; $a:b-na = \frac{e}{1-ne}$ und $b-na:a = \frac{1-ne}{e}$. Anfänger können sich diese Sätze zur Uebung in Worte übersetzen.

§. 62.

Anmerk. Die Ursache, warum wir in geometrischen Verhältnissen das vorhergehende Glied zur lincken, das nachfolgende zur rechten, und zwischen beyde zwey Punkte setzen, liegt in ihrer Erklärung §. 52. Indessen sind Verhältnisse und Quotienten nicht einerley, denn der Quotient oder Exponent zeigt nur das geometrische Verhältniß an, etwa wenn ich mich so ausdrücken darf, wie der Barometer nur die Witterung anzeigt, und nicht die Witterung selbst ist. Bey dem Verhältniß 20 : 5 zeigt der Exponent 4 nur an, wie vielmal die eine Zahl 5 in der andern 20 enthalten sey. Beyde Zahlen deren arithmethisches oder geometrisches Verhältniß man bestimmen will, können benannte Zahlen einerley Art seyn, alsdann ist die Zahl, welche ihr arithmetisches Verhältniß anzeigt, ebenfalls eine benannte Zahl von derselben Art, aber ihre geometrische Vergleichung giebt allemal eine unbenannte Zahl zum Exponenten.

§. 63.

Von den Verhältnissen, mehrere zugleich betrachtet.

Offenbar sind zwey Verhältnisse einander gleich, wenn die vorhergehenden Glieder derselben, aus ihren nachfolgenden Gliedern, auf eine und dieselbe Art hervorgebracht werden. Zwey arithmetische Verhältnisse, sind also einander gleich, wenn ihre Differenzen, einander gleich sind; und zwey geometrische, sind einander gleich, wenn ihre Exponenten einander gleich sind; und umgekehrt, gleiche arithmetische Verhältnisse haben gleiche Differenzen, und gleiche geometrische Verhältnisse haben einerley Exponenten.

§. 64.

Arithmetische Verhältnisse können nur alsdann einander gleich seyn, wenn alle Glieder derselben zu einer Art gehören, weil ihre Differenzen immer mit den Größen, die verglichen werden, einerley Art sind §. 62, und diese Verhältnisse können nur dann gleich seyn, wenn ihre Differenzen es sind.

Hingegen bey den geometrischen Verhältnissen, kann die Gleichheit statt finden, wenn nur die Glieder jedes Verhältnisses, für sich genommen, gleichartig sind.

§. 65.

Wenn daher a, b, c, h, k, Größen von einerley Art sind, so ist, wenn $a - b = d$, und $h - k = \delta$ ist, auch $(a + h) - (b + k) = d + \delta$, und $(a + h) - (b + k) = d - \delta$. Ist $d = \delta$ so wird $(a + h) - (b + k) = 2\delta$; und $(a - h) - (b - k) = d - \delta = 0$.

Wenn ferner: $a - b = d$
und $b - c = \delta$

so wird $(a \pm b) - (\pm b + c) = d + \delta$, es mögen die obern oder die untern Zeichen gebraucht werden. Denn: im

ersten Fall wird $(a \pm b) - (\pm b + c) = (a + b) - (b + c) = a - c = d + \delta$. Im zweyten Fall wird $a - b - (-b + c)$ auch $= a - c = d + \delta$, und wenn auch hier $d = \delta$, so ist alsdann $a - c = 2d$.

$$\begin{array}{rl} \text{Es sey} & a - b = d \\ & b - c = \delta \\ \hline \text{so ist} & a - c = d + \delta \\ \text{es sey ferner} & c - f = g \\ \hline \text{so ist wieder} & a - f = d + \delta + g \\ \text{wäre auch} & f - m = n \\ \hline \text{so wäre wieder} & a - m = d + \delta + g + n \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \text{Es ist daher wenn} & a - b = d \\ & b - c = \delta \\ & c - f = g \\ & f - m = n \\ \hline \text{auch} & a - m = d + \delta + g + n \end{array}$$

und so kann man leicht diese Sätze auf noch mehr Verhältnisse ausdehnen. Wäre hier $d = \delta = g = n$, so würde $a - m = 4\,d$ seyn.

§. 66.

Anmerk. Damit Anfänger nicht etwa glauben, daß diese Zusammensetzungen der arithmetischen Verhältnisse ohne Nutzen sind; so will ich hier nur erwähnen: daß die so genannten pracktischen Mathematiker, (worunter hier vorzüglich alle Feldmesser und Baubedienten, vom Conducteur bis zum geheimen Oberbaurath, verstanden werden,) sich dieser Zusammensetzungen der arithmetischen Verhältnisse, z. B. beym Nivelliren bedienen, ohne daß sie es leider selbst wissen. Wenn man nemlich von zwey Orten a und m das Gefälle wissen will, so nivellirt man von a bis b, von b bis c, von c bis f und endlich von f bis n, drücken

nun diese Buchstaben zugleich, die an ihrem Orte, an der Nivellirlatte gemessenen Höhen aus, so ist das Gefälle

von a bis b = d
von b bis c = δ
von c bis f = g
von f bis m = n

also das Gefälle von a bis m = $d + \delta + g + n$. *)

§. 67.

Wenn , $a : b = e$
und $h : m = n$

so ist $ah : bm = en$

Beweis. $a : b = \frac{a}{b} = e$

und $h : m = \frac{h}{m} = e$

folglich $ah : bm = \frac{ah}{bm} = en$. Ist $e = n$, so wird $ah : bm = e^2$

§. 68.

Wenn , $a : b = e$
und $h : m = n$

so ist auch $\frac{a}{h} : \frac{b}{m} = \frac{e}{n}$

Beweis.

*) Wer wird sich wol wundern, daß die Mathematik so selten, die ihr gebührende Achtung erweckt, wenn examinirende Räthe selbst eine Unwissenheit, in ihren einfachsten und ersten Grundsätzen zeigen, die den examinirten Canditaten, der sich mit ihr beschäftigt hat, in nicht geringe Verlegenheit setzt? — Bey dem gewöhnlichen Schlag der Canditaten, muß dis Gleichgültigkeit gegen sie erwecken, und den Wahn erzeugen, daß eine mechanisch erlernte Praxis weiter, als eine Praxis, die auf Theorie sich stützt, führe Hierbey befinden sie sich allerdings sehr wohl, — aber der Staat? — —

Beweis. $a : b = \frac{a}{b} = e$

$m : h = \frac{m}{h} = \frac{1}{n}$

folglich $am : bh = \frac{am}{bh} = \frac{e}{n}$

aber $am : bh = \frac{am}{h} : b = \frac{a}{h} : \frac{b}{m}$ (§. 61.)

mithin $\frac{a}{h} : \frac{b}{m} = \frac{e}{n}$. Ist $e = n$, so wird

$am : bh = \frac{a}{h} : \frac{b}{m} = a$

also $am = bh$, oder $\frac{a}{h} = \frac{b}{m}$.

§. 69.

Wenn $a : b = e$
und auch $h : m = e$

so ist $(a \pm h) : (b \pm m) = e$

das heißt: Ein Verhältniß bleibt unverändert, wenn man die gleichnamigen Glieder eines andern ihr gleichen Verhältnisses zu ihren Gliedern addirt oder subtrahirt.

Beweis. Es ist $a : b = be : b$
und $h : m := me : m$

folglich $(a \pm h) : (b \pm m) = (be \pm me) : (b \pm m)$

mithin $\frac{a \pm h}{b \pm m} = \frac{(b \pm m)\, e}{b \pm m} = e$.

Für mehrere Verhältnisse stehet dieser Satz §. 95.

§. 70.

Wenn $a : b = e$
und $b : c = e$

so ist $ab : bc = e^2$ (§. 67.)

folglich $a : c = e$ (§. 61.)

Alle

Alle diese Sätze von §. 67. bis §. 70. lassen sich sehr leicht auf mehr als zwey Verhältnisse ausdehnen.

§. 71.

Von den Proportionen.

Von zwey gleichen Verhältnissen sagt man: ihre Glieder stehen in der Ordnung, in welcher sie in den Verhältnissen auf einander folgen, in Proportion: so daß also die Proportion nichts anders als die Gleichheit zweyer Verhältnisse ist. Sind die gedachten Verhältnisse arithmetische, so wird auch die Proportion eine arithmetische Proportion (proportio arithmetica) genannt, und sind dieselben geometrische, so erhält die Proportion diesen Beynamen ebenfalls (proportio geometrica).

Ist also $a - b = g - h$
und $n : m = p : q$
so stehen a, b, g, und h, in einer arithmetischen, und n, m, p, und q, stehen in einer geometrischen Proportion.

§. 72.

Eine Proportion bestehet also aus zwey Verhältnissen, und daher aus vier Gliedern. Das erste und dritte, ingleichen das zweyte und vierte Glied werden gleichnamige Glieder, oder ähnlich liegende (homotogi) genannt. Das erste und vierte Glied sind ihre äussern Glieder, das zweyte und dritte Glied ihre mittlern Glieder. Unter der Differenz oder dem Exponenten einer Proportion versteht man die, bey den darinn befindlichen Verhältnissen, gemeinschaftliche Differenz oder den Exponenten. Drückt man diese Differenz durch - d, und den Exponenten durch $\frac{1}{e}$ aus, und nennt dabey die vorhergehenden Glieder beyder Verhältnisse a und c, so ist nach

nach dem festgesetzten Begriff von Verhältniß und Proportion leicht einzusehen, daß

$$a-(a+d)=c-(c+d)$$

ein allgemeiner Ausdruck der arithmetischen, und

$$a:ae=c:ce$$

ein allgemeiner Ausdruck oder Construktion der geometrischen Proportion ist.

§. 73.

Von den arithmetischen Proportionen.

Wenn $a-b=c-g$, so ist auch $b-a=g-c$, denn die Differenz dieser Proportion ist bloß der vorhergehenden entgegengesetzt, welches man auch gleich einsieht, wenn man die allgemeine Construktion dafür setzt. Nemlich $a-(a+d)=c-(c+d)$, hier ist die Differenz $-d$ also auch $(a+d)-a=(c+d)-c$, und hier ist die Differenz $+d$

ferner ist auch $a-c=b-g$

denn offenbar ist $a-c=(a+d)-(c+d)$

das heißt: **In jeder arithmetischen Proportion können die beyden mittlern Glieder verwechselt werden, ohne die Gleichheit der Verhältnisse aufzuheben.**

§. 74.

Lehrsatz.

In jeder arithmetischen Proportion ist die Summe der beyden mittlern Glieder so groß, als die Summe der beyden äussern.

Beweis.

Jede arithmetische Proportion läßt sich so construiren:

$$a-(a+d)=c-(c+d)$$

oder $(a+d)-a=(c+d)-c.$

In

In beyden Fällen ist $a + (c + d) = (a + d) + c$.
Wenn $f + n = g + m$; so ist $f - g = m - n$.

§. 75.

Wenn . . . $a - b = c - g$
so ist $a + g = b + c$. §. 74.
also $g = b + c - a$
und $a = b + c - g$
und $b = a + g - c$
und endlich $c = a + g - b$.

Man kann also aus drey gegebenen Gliedern einer arithmetischen Proportion, immer das fehlende Glied finden, und zwar wenn ein äusseres Glied fehlt, so findet sich solches, wenn man von der Summe der beyden mittlern Glieder das bekannte äussere abzieht.

Fehlt ein mittleres Glied, so wird solches gefunden, wenn man von der Summe der beyden äussern Glieder das bekannte mittlere abzieht.

Exempel.

Es sind die Zahlen 9, 3, 11 in der Ordnung wie sie hier auf einander folgen, das 1ste, 2te und 3te Glied einer arithmetischen Proportion, wenn man das 4te Glied finden soll. Nach obiger ersten Regel ist die Rechnung selbst folgende:

	3	2tes Glied
	11	3tes Glied
	14	Summa der beyden mittlern Glieder.
	9	erstes oder äusseres Glied.
bleibt	5	viertes Glied.

demnach ist $9 - 3 = 11 - 5$.

Wären in dieser Proportion 9, 11 und 6 gegeben, und man sollte also das fehlende mittlere Glied finden, so ist $9 + 5 - 11 = 3$ das gesuchte Glied.

§. 76.

§. 76.

Zusatz.

Da bey den 3 gegebenen Gliedern einer arithmetischen Proportion das eine Verhältniß immer vollständig gegeben ist, so ist es meistentheils bequemer daraus die Differenz zu suchen, und aus ihr und dem einen gegebenen Gliede des andern Verhältnisses, das folgende Glied zu finden.

Die Rechnung wäre hiernach bey dem ersten Exempel des vorigen §. $11 - (9 - 3) = 11 - 6 = 5$; bey dem 2ten Exempel $9 - (11 - 5) = 9 - 6 = 3$ es ist nemlich offenbar $g = c - (a - b)$

$$a = b + (c - g)$$
$$b = a - (c - g)$$
und $c = g + (a - b)$

Die in den Klammern stehenden Größen geben immer die Differenz, und man muß nur noch bemerken, daß wenn das 1ste oder 3te Glied gesucht wird, die Differenz addirt, wann aber das 2te oder 4te Glied gesucht wird, die Differenz abgezogen wird.

§. 77.

Wenn die mittlern Glieder in einer arithmetischen oder auch geometrischen Proportion gleich sind, so heißt sie stetig (continua). Der allgemeine Ausdruck einer stetigen arithmetischen Proportion ist folgender:

$$a - (a + d) = (a + d) - (a + 2d).$$

Es ist nemlich in der allgemeinen Form $c = a + d$ gesetzt worden.

§. 78.

Eine stetige Proportion hat also nur drey verschiedene Glieder, und das zweyte, welches hier das mittlere heißt, kommt eigentlich zweymal vor. Ist also $a - b = b - g$, so wird $a + g = 2b$, das heißt: die Summe

me der äussern Glieder ist hier doppelt so groß, als das mittlere (§. 74.); da $a + g = 2b$, so ist $b = \frac{1}{2}(a + g)$ das heißt: Das mittlere Glied ist bey einer stetigen arithmetischen Proportion gleich der halben Summe der äusseren Glieder; ferner ist hier $a = 2b - g$, und $g = 2b - a$, ein äusseres Glied wird also hier gefunden, wenn man das bekannte äussere von dem doppelten mittleren Gliede abzieht.

§. 79.

Es ist hier $d = \frac{1}{2}(g - a)$

Beweis. Es ist $a - b = d$
ferner $d - g = d$

folglich $a - g = 2d$. §. 65.
mithin $\frac{1}{2}(a - g) = d$

Nun ist $b = a + d$; folglich findet man auch $b = a + \frac{1}{2}(a - g)$, oder da b auch $= g - d$, so ist $b = g - \frac{1}{2}(a - g)$.

§. 80.

Anmerk. Zwischen zwey Zahlen die mittlere arithmetische Proportionalzahl finden, heißt nichts anders, als das mittlere Glied einer stetigen arithmetischen Proportion zu finden. Man pflegt eine mittlere arithmetische Proportionalzahl zu suchen, wenn man wissen will, wieviel zwey Größen, eine in die andere gerechnet, betragen. Z. B. Es hat jemand im letzten Jahre 3754 Rthlr. gewonnen, und im vorletzten Jahre 4106 Rthlr, so findet sich der mittlere Gewinn für beyde Jahre $= \frac{3754 + 4106}{2} = \frac{7806}{2} = 3930$ Rthlr. Im gemeinen Leben bedient man sich bey Finanzrechnungen u. d. gl. eines Verfahrens, welches mit der Art, das arithmetische Mittel zu finden, Aehnlichkeit hat. So wird z. B. der Ertrag eines

eines Gutes dadurch bestimmt, daß man den Durchschnitt (die Fraktion) macht. Man nimmt nemlich von 3, 6 oder mehr Jahren den jährlichen Ertrag, addirt sie und dividirt die Summe durch die Anzahl der Jahre.

Es sey der Ertrag im ersten Jahre gewesen		1800	Rthlr.
— — — zweyten	— —	1600	—
— — — dritten	— —	1900	—
— — — virten	— —	1700	—
	Summa	7000	
In diese Summe mit der Anzahl der Jahre dividirt giebt	. . . . .	1750	Rthlr.

welches der Ertrag im Durchschnitt ist.

Eben so verfährt man bey folgenden Exempel.

In einer Stadt sind in 10. auf einander folgenden Jahren gebohren.

Im	ersten Jahre	1817.
—	zweyten —	1949.
—	dritten —	2103.
—	vierten —	2422.
—	fünften —	1897.
—	sechsten —	1755.
—	siebenten —	2214.
—	achten —	2145.
—	neunten —	1999.
—	zehnten —	2003.
	Summa .	20304.

10) ———————

2030, 4 mittlere Anzahl der jährlich Gebornen

§. 81.

Anmerk. Die Art, wie wir die Proportionen schreiben, ist nicht überall gebräuchlich. Die Ausländer schreiben die arithmetische Proportion so: 20.15 .·. 35.30, und die geometrische Proportion so: 20.15 :: 8.6.

Unsere

Unsere Art die arithmetischen Proportionen anzuzeigen, gründet sich auf ihre Erklärung, und ist von dem Freyherrn von Wolf zuerst gebraucht worden. Das natürliche Zeichen für die geometrische Proportion, welches die Erklärung selbst ausdruckt, so wie wir es eben angezeigt haben, wurde vom Freyherrn von Leibnitz zuerst gebraucht.

Von den geometrischen Proportionen.

§. 82.

Die allgemeinste Construktion einer geometrischen Proportion, (oder wie wir künftig der Kürze wegen nur immer Proportion schreiben werden, wenn wir eine geometrische Proportion anzeigen wollen, und nur bey der arithmetischen Proportion wollen wir immer das Prädikat arithmetisch vorsetzen), ist:

$$a : ae = b : be$$

und daher offenbar $a \,.\, be = ae \,.\, b$

das heißt: **Das Produkt der äußern Glieder ist gleich dem Produkte der mittlern Glieder**, einen Satz, den wir bereits auf eine andere Art im erstem Theile dieses Werks Seite LIX. §. 64. erwiesen haben.

Wenn also $a : b = c : d$ so ist $a . d = b . c$.

Hieraus fließt:

$$a = \frac{b.c.}{b}\,;\; d = \frac{b.d.}{a}\,;\; b = \frac{a.d.}{c}\,;\; c = \frac{a.d.}{b}$$

und darnach läßt sich aus jeden drey Gliedern eine Proportion des vierten finden. Man findet nemlich ein äusseres Glied: **wenn man das Produkt der mittlern Glieder durch das bekannte äussere Glied dividirt. Ein mittleres Glied wird gefunden, wenn man das Produkt der äussern Glieder durch das bekannte mittlere Glied dividirt.**

Man kann indeß auch oft aus den Gliedern des vollständig gegebenen Verhältnisses leicht den Exponenten finden, und dann ist es vortheilhafter, diesen Exponenten zu suchen, aus ihm und dem gegebenen Gliede des

andern

andern Verhältnisses das fehlende Glied zu finden. Es finden hier auch manche Vortheile statt, die aber nicht hierher, sondern in eine praktische Anweisung zur Regel-Detrie gehören.

Wenn die beyden mittlern Glieder einer geometrischen Proportion gleich groß sind: so heißt sie eine stetige Proportion.

Der allgemeine Ausdruck war:

$$a : ae = b : be$$

setzt man hier $b = ae$, so erhält man für die stetige Proportion:

$$a : ae = ae : ae^2.$$

Ist nun $a : b = b : c$, so wird $a . c = b^2$, oder das Produkt der äussern Glieder ist gleich dem Quadrat des mittelsten Gliedes. Hieraus folgt $a = \frac{b^2}{c}$; $c = \frac{b^2}{a}$, man kann daher die äussern Glieder finden. Wie man aber das mittlere Glied hier findet, kann noch nicht gewiesen werden, da wir noch nichts von Ausziehung der Quadratwurzel gehabt haben.

§. 84.

Vorausgesetzt, daß a, b, c, und d gleichartige Grössen sind, so ist wenn $a : b = c : d$
auch $b : a = d : c$.

In Worten: In jeder Proportion kann man die Glieder in beyden Verhältnissen verwechseln, und die verwechselten Glieder werden eben so eine Proportion machen.

Beweis.

Denn, ist der Verhältnißnahme oder den Exponent $a : b = c : d$ gleich e, so haben die Verhältnisse $b : a$ und $d : c$ beyde den Exponenten $\frac{1}{e}$ (§. 59.), welches

ches sich auch ganz augenscheinlich zeigt, wenn man die allgemeinen Construktionen nimmt. $a : ae = b : be$
also auch $ae : a = be : b$

§. 85.

Wenn man die mittlern Glieder einer Proportion miteinander verwechselt, so machen die verwechselten Glieder mit der umgeänderten in der Ordnung, wie sie stehen, wiederum eine Proportion. Daß heißt wenn $a : b = c : d$, so ist auch $a : c = b : d$.

Beweis.

Denn gebraucht man die Construktion $a : ae = b : be$, so ist offenbar, daß auch noch $a : b = ae : be$ ist. Der Beweis kann auch so geführt werden.

Da $a : b = c : d$ nach der Voraussetzung, so ist auch $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, und daher auch $\frac{a}{bc} = \frac{1}{d}$, ferner $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$, folglich $a : c = b : d$.

§. 86.

Wenn zwey Produkte gleich groß sind, und ein jedes aus zwey Faktoren besteht; so sind die beyden Faktoren des einen Produkts zwischen den beyden Faktoren des andern, mittlere geometrische Proportionalzahlen. Das heißt, wenn $ad = bc$, so ist $a : b = c : d$.

Beweis.

Da $ad = bc$, so ist auch $\frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd}$, oder $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ und daher allerdings $a : b = c : d$.

§. 87.

Wenn F, f, zwey Faktoren und ihr Produkt gleich P, so ist $F . f = 1 . P$ und daher $1 : f = F : P$, das heißt:

Die

Die Einheit ist so oft in dem einen Faktor enthalten, als der andere Faktor im Produkte enthalten ist. Daher zwey Zahlen mit einander multipliciren, nichts anders heißt, als: Zur Einheit in den beyden gegebenen Zahlen die vierte geometrische Proportionalzahl finden.

§. 88.

Ist D der Dividendus, d der Divisor und Q der Quotient von beyden; so ist $\frac{D}{d}=\frac{Q}{1}$, also $1.D=d.Q$, mithin $d:D=1:Q$, das will sagen: Der Divisor ist in dem Dividendus so oft enthalten, als die Einheit im Quotienten. Daher sagt man zwey Zahlen durch einander dividiren heisse: zum Divisor, Dividendus und der Einheit, die vierte geometrische Proportionalzahl finden.

Anmerk. §. 87. und 88. enthalten demnach die allgemeimeinen Erklärungen der Multiplication und Division, die auch Brüche und Irrationalzahlen (welche letztere wir noch nicht kennen), unter sich begreifen.

Wenn $a:b=c:d$

so ist auch $\frac{a}{n}:\frac{b}{n}=c:d$

und $\frac{a}{n}:b=\frac{c}{n}:d$

Beweis.

Die zweyte Proportion ist richtig, weil das Verhältniß $a:b=\frac{a}{n}:\frac{b}{n}$ ist. (§. 61) Aus der ersten folgt $a:c=b:d$, also auch $\frac{a}{n}:\frac{c}{n}=b:d$ und folgl. $\frac{a}{n}:b=\frac{c}{n}:d$ (§. 85.)

Anmerk. Diese Divisionen der gleichnamigen Glieder kürzen die wirklichen Rechnungen in der Regel Detri, wenn sie gut angebracht werden, sehr ab.

§. 90.

Zwey Brüche, die gleiche Nenner haben, verhalten sich wie ihre Zähler.

Denn $\frac{a}{b} : \frac{c}{b} = a : c$. (§. 61.)

Zwey Brüche von gleichem Zähler, verhalten sich umgekehrt wie ihre Nenner.

Denn $\frac{a}{b} : \frac{a}{c} = \frac{1}{b} : \frac{1}{c} = \frac{c}{b} : 1 = c : b$.

Zwey Brüche von ungleichen Zähler und Nenner, verhalten sich wie die Produkte aus des einem Zähler in des andern Bruchs Nenner.

Denn $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{b} : c = ad : bc$.

§. 91.

Wenn zwey Verhältnisse einander gleich sind, so verhalten sich die Summen oder Unterschiede der Glieder eines jeden Verhältnisses, wie die gleichnahmigten Glieder beyder Verhältnisse.

Es sey $a : b = c : d$, so soll auch seyn $(a \pm b) : (c \pm d) = a : c$ oder wie $b : d$.

Beweis.

In der allgemeinen Construktion der Proportion ist $b = ae$ und $d = ce$. Daher $(a \pm b) : (c \pm d) = (a \pm ae) : (c \pm ce) = a(1 \pm e) : c(1 \pm e) = a . c$.

§. 92.

Da $(a \pm b) : (c \pm d) = a : c = b : d$, so ist auch

$(a \pm b) : a = (c \pm d) : c$
und . $(a \pm b) : b = (c \pm d) : d$ } §. 85.

und

und daher auch $\left.\begin{array}{l} a : (a \pm b) = c : (c \pm d) \\ b : (a \pm b) = d : (c \pm d) \end{array}\right\}$ §. 84.

§. 93.

Wenn zwey Verhältnisse einander gleich sind, so verhalten sich die Summen der Glieder jedes Verhältnisses, eben so, wie ihre Unterschiede.

Wenn nemlich $a : b = c : d$, so wird auch $(a \pm b) : (c \pm d) = (a - b) : (c - d)$.

Beweis.

Dieser folgt unmittelbar aus §. 91. denn nach dem dortigen Satze ist $(a \pm b) : (c \pm d) = a : c$
und $(a - b) : (c - d) = a : c$
folglich auch $(a + b) : (c + d) = (a - b) : (c - d)$.

§. 94.

Zusatz.

Da $(a + b) : (c + d) = (a - b) : (c - d)$
so ist auch $(a + b) : (a - b) = (c + d) : (c - d)$. §. 85.
und daher auch $(a - b) : (a + b) = (c - d) : (c + d)$. §. 84.

§. 57.

Wenn mehrere Verhältnisse, die aus Gliedern von eben der Art bestehen, einander gleich sind, so stehen die Summen oder Unterschiede gleichnahmigter Glieder dieser Verhältnisse in einem Verhältnisse, das jedem der gegebenen gleichen Verhältnisse gleich ist.

Das heißt: Wenn $a : b = c : d = e : f = g : h = i : k$ u. s. w.
so ist allemal $(a + c + e + g + i) : (b + d + f + h + k.) = a : b = (a - c + e - g + i) : (b - d + f - h + k)$.

Beweis.

Es ist offenbar $a : b = a : b$
und $c : d = a : b$

folglich $(a \pm c) : (b \pm d) = a : b.$ §. 69.
nun ist auch $e : f = a : b.$

so ist wiederum auch $(a \pm c \pm e) = (b \pm d \pm f) = a : b$
und da $g : h = a : b$

so hat man wieder $(a \pm c \pm e \pm g) : (b \pm d \pm f \pm h) = a : b$
endlich da auch $i : k = a : b$

so ist aus obigen Gründen auch

$$(a \pm c \pm e \pm g \pm i) : b \pm d \pm f \pm h \pm k) = a : b$$

und so würde sich der Beweis für mehrere Glieder leicht fortsetzen lassen.

§. 45.

Wenn vier Größen in Proportion stehen, so machen die zwoten, dritten, vierten, und überhaupt die 12ten Potenzen dieser Größen, in eben der Ordnung eine Proportion.

Z. B. Wenn $a : b = c : d$
so ist auch $a^n : b^n = c^n : d^n.$

Beweis.

Es ist . . $a : b = c : d$
und $a : b = c : d$

folglich $a^2 : b^2 = c^2 : d^2.$ §. 70.
ferner $a : b = c : d$

mithin auch . . $a^3 : b^3 = c^3 : d^3.$ §. 70.
ferner $a : b = c : d$

endlich wieder $a^4 : b^4 = c^4 : d^4.$
folglich allgemein:
$a^n : b^n = c^n : d^n.$

§. 97.

§. 97.

Wenn $a : b = c : d$ und
$f : g = h : k$ ist, so ist auch

$af : bg = ch : dk.$

Beweis.

Der Exponent des Verhältnisses $a : b$ sey $= e$ und des Verhältnisses $f : g = n$, so ist $af : bg = ne$ (§. 67.), aber eben diesen Exponenten hat $ch : dk$, folglich ist $af : bg = ch : dk$.

§. 98.

Wenn $a : b = c : d$, und
$f : g = h : k$ ist, so ist auch

$\frac{a}{f} : \frac{b}{g} = \frac{c}{h} : \frac{d}{k}$

Beweis.

Aus dem vorigen §. erhellt, daß $a : b = e$, und $f : g = n$ daher $\frac{a}{f} : \frac{b}{g} = \frac{e}{n}$, (§. 68.) $= \frac{c}{h} : \frac{d}{k}$.

§. 99.

Wenn $a : b = c : d$, und
$b : g = d : k$ ist, so ist auch

$ab : bg = cd : dk.$ §. 97.

folglich $a : g = c : d$

und wenn $a : b = c : d$ und
$f : a = h : c$ ist, so ist auch

$af : ab = ch : cd$

folglich $f : b = h : d.$

dies nannten die Alten ordinatim ex aequo schließen.

§. 100.

Ist . . a : b = c : d und
a : g = h : d, so ist auch

g : b = c : h
und
Ist a : b = c : d und
f : b c = : k, so ist auch

a : f = k : d

dies nannten die Alten, perturbate et ex aequo schließen. Der Beweis ist leicht, wenn man nur die Glieder in der zweyten Proportion des ersten und zweyten Satzes verwechselt.

Von der Regel Detri und ihrer Anwendung.

§. 101.

Die Regel des 82 §, nach welcher man zu dreyen Zahlen die vierte geometrische Proportionalzahl sucht, heißt die Regel Detri, eigentlich: regula de tribus sc. numeris. Sie heißt auch die güldene Regel (regula aurea), wegen ihres überaus großen und allgemeinen Nutzens, so wol in der ganzen Mathematik, als auch bey solchen Rechnungsfragen, die im bürgerlichen Leben, beym Handel und allerhand Arten der Handthierung und Gewerbe vorkommen. Die Anwendung dieser Regel auf die Rechnungsfragen der letztern Art wird gewöhnlich in den sogenannten Rechenbüchern sehr weitläuftig gezeigt, und die Sache selbst durch mancherley Arten Exempel erklärt. Der Vortrag ist in den meisten Rechenbüchern hierüber so schlecht und wegen der großen Menge specieller Regeln, die nur in einzelnen Fällen brauchbar sind, so schwer und unangenehm, daß diejenigen, die so unglücklich sind, einen solchen Unterricht zu geniessen, verschiedene Jahre nöthig haben, ehe sie einigermaaßen im Rechnen geübt werden.

In-

Indessen wäre es freilich eben nicht der beste Weg, wenn man allen jungen Leuten, die zur Handlung zu Künsten, oder Handwerken vorbereitet werden sollen, die Rechenkunst nach mathematischer Lehrart vortragen wollte. Man würde dadurch bey einem großen Theil derselben seines Zwecks verfehlen, weil sie kaum aufgelegt sind, nach der Erwartung ähnlicher Fälle zu schließen, geschweige eine lange Reihe aneinander hängender allgemeiner Wahrheiten zu überdenken. Für solche junge Leute muß demnach wol ein anderer Weg eingeschlagen und manches muß sie freylich bloß empyrisch gelehrt werden. Aber Gelehrte und überhaupt solche Personen, die ihre Seelenkräfte mehr, als der gemeine Haufen brauchen, können auf einem weit leichtern Wege zu eben dem Ziele gelangen.

§. 102.

Die Regel Detri läßt sich allemal anwenden, wenn man weiß, daß ein paar Größen von einer gewissen Art, sich eben so wie ein paar Größen verhalten, die zu eben derselben, oder auch zu einer andern Art gehören; drey von diesen Größen müssen alsdann gegeben seyn, wenn die vierte gesucht wird. Man muß daher zuförderst wissen, ob zwey Größen, wovon in der Aufgabe die Rede ist, sich wirklich so gegen einander verhalten, wie die dritte zur gesuchten Größe, bevor man die Regeln anwenden kann. Bevor man aber im Stande ist, irgend eine hierher gehörige Rechnungsaufgabe aufzulösen, muß man vorher die Verhältnisse und Proportionen derjenigen Sachen gegeneinander kennen, womit man bey den täglichen Geschäften des gemeinen Lebens zu thun hat. Gesetze oder eingeführte Gewohnheiten haben bereits solche bestimmt, und man lernt sie zum Theil von Jugend auf, so zu sagen von selbst kennen.

§. 103.

Die vornehmsten zur Regel Detri gehörigen Fälle, welche bey den im gemeinen Leben üblichen Rechnungsfragen am meisten vorkommen, sollen nun nach einander auf gewisse Grundregeln gebracht, und jede derselben mit einigen dahin gehörigen Exempeln erläutert werden. Hieher gehören alle die Fälle, da man eine genannte Zahl auf einen andern Namen bringen soll: Z. E. Wie viel Thaler machen 517 Groschen? und umgekehrt. Fälle von dieser Art werden zwar meistens aufgelößt, ohne die Sache eben so allgemein als hier zu betrachten; allein das schadet nichts, sie gehören zu allgemeinen Aufgaben. Wenn also überhaupt eine gewisse Menge von Einheiten der einen Benennung so viel ausmacht, als eine andere Menge von Einheiten von anderer Benennung: so sieht man leicht, daß die doppelte Anzahl der ersten Art so viel ausmache, als die doppelte Anzahl der andern, und die dreyfache Anzahl der ersten so viel, als die dreyfache Anzahl der andern u. s. f. Wenn drey Mariengroschen 2 gute Groschen werth sind, so sind 2mal 3 Mariengroschen auch 2mal 2 gute Groschen werth. Will man also wissen, wie viel 296 Mariengroschen werth sind; so kann man ansetzen 3 Mgr. : 296 Mgr. = 2 Ggr. zum Werth von 296 Mgr. in gute Groschen ausgedrückt, also die gesuchte:

$$= \frac{296\ \text{Mgr.}\ 2\ \text{Ggr.}}{3.\ \text{Mgr.}} = \frac{296.\ 1\ \text{Mrg.}\ 2\ \text{Ggr.}}{3.\ 1.\ \text{Mgr.}}$$

$$= \frac{296.\ 2.\ \text{Ggr.}}{3.} = \frac{592.\ \text{Ggr.}}{3.} = 197\tfrac{1}{3}.\ \text{Ggr.}$$

Noch ein Exempel. Wenn 14400 Rheinl. Fuß so viel machen, als 13913. Pariser Fuß, wie viel Rheinl. Fuß machen 328 Pariser Fuß?

Man setzt an

13913. P. F. : 328. P. F. = 14400. R. F. : gesuchten Zahl welche wir x nennen wollen, also:

$x =$

$$x = \frac{328.\ \text{P. F.}\ 14400.\ \text{R. F.}}{13913.\ \text{P. F.}} = \frac{328.\ \text{P. F.}\ 14400.\ \text{R. F.}}{13913.\ 1.\ \text{P. F.}}$$

$$= \frac{328.\ 14400.\ \text{R. F.}}{13913.} = 339,48\ \text{Rheinl. Fuß.}$$

Dies ist der Grund aller Reduktionen der mancherley Maaße, Gewichte und Münzen auf andre, wenn man es weiß, wie viel von der einen Art eine gewisse Menge der andern ausmacht.

§. 104.

Zwey von den dreyen gegebenen Zahlen müssen einerley Nahmen haben, oder doch auf einerley Nahmen gebracht werden können: Die dritte von den gegebenen Zahlen muß mit der gesuchten von einerley Art seyn. (§. 64.) Die Rechenmeister nennen eine von den beyden ersten Zahlen die Fragzahl des Exempels, weil eine von den beyden ersten Zahlen gewöhnlich mit der gesuchten Zahl vermittelst der Frage: wie viel? oder eines ähnlichen Fragwortes verbunden ist. Bey unsern im vorigen §. gelehrten Ansatz, kömmt also die Fragzahl in die Mitte, was mit ihr von einerley Art ist voran, was mit der gesuchten Zahl von einerley Art ist, in die dritte Stelle, und dieser Ansatz ist ganz der Natur der Proportion gemäß. Allein die Rechenmeister schreiben das Exempel so nieder, wie es beym gewöhnlichen Ausdruck lautet: alsdann kommt die Fragzahl in die dritte Stelle, was mit ihr von einerley Art ist, voran, und was mit der gesuchten Zahl von einerley Art ist, in die Mitte. Hiernach geordnet müste das zweyte Exempel des vorigen §. so stehen:

$$13913\ \text{P. F.} : 14400\ \text{R. F.} = 328\ \text{P. F.} : x\ \text{R. F.}$$

Auch hier gilt die Regel: Man dividire das Produkt der beyden letzten Zahlen mit der ersten. Man erhält auf diese Art das nemliche Resultat, weil man man eigentlich

lich die oben stehenden Zahlen nur als Zahlen betrachtet, die eine Proportion ausmachen, und nicht darauf Rücksicht nimmt, daß sie sich auf verschiedene Einheiten beziehen, so ist also die Verwechselung der beyden mittlern Glieder erlaubt. (§. 85). Nur muß man bemerken, daß die gesuchte Zahl nur allemal mit derjenigen Zahl unter einerley Nahmen gefunden werde, welche ihre Stelle in der Mitte erhält.

Wir wollen dieses durch noch ein Beispiel erläutern. Gesetzt 7 ℔. kosten 12 Rthlr. was kosten 35 ℔.

Der Rechenmeister setzt also an:

$$7 \text{ ℔.} : 12 \text{ Rthlr.} = 35 \text{ ℔.} : x \text{ Rthlr.}$$

und findet $x = \frac{12 \text{ Rthlr. } 35 \text{ ℔.}}{7 \text{ ℔.}} = 60 \text{ Rthlr.}$

Allein dieser Ansatz taugt nichts, weil 7 ℔. 12 Rthlr. kein Verhältniß geben kann, da offenbar weder Pfunde in Thalern, noch Thaler in Pfunden enthalten seyn können.

Der Mathematiker würde es besser so ordnen:

$$7 \text{ ℔.} : 35 \text{ ℔.} = 12 \text{ Rthlr.} : x \text{ Rthlr.}$$

folglich $x = \frac{35 \text{ ℔. } 12 \text{ Rthlr.}}{7 \text{ ℔.}} = 60 \text{ Rthlr.}$

Diese mathematische Ordnung der Glieder hat den Vortheil, daß sie uns gleich darauf führt, die Proportion bey den Zahlen aufzusuchen, wo wir die Regel Detri anbringen wollen, und sie also weder da anzubringen, wo sie nicht hingehört, noch auch wo sie hingehört, sie falsch anzubringen.

§. 105.

Wer nach der Regel Detri berechnen wollte, wie tief ein Körper in 7 Secunden gefallen sey, wenn er in einer Secunde $15\frac{5}{8}$ rheinl. Fuß fällt, der würde eine falsche Anwendung dieser Regel machen, denn aus der Physik

ist

ist bekannt, daß der Fall-Körper nicht in denselben Verhältniß wächst, als die Zeit.

§. 106.

In §. 103. habe ich in dem ersten Exempel 296 Mgr. so ausgedruckt, 296. 1 Mgr. durch diese Vorstellung, sieht man deutlich, daß sich die Benennung Mgr. aufhebt, so wie im zweyten Exempel die Benennung P. F., daher bleibt im ersten Exempel weiter keine benannte Zahl als Ggr. und in dem zweyten R. F. Auf diese Art weiß man also ganz bestimmt von welcher Art das Resultat seyn muß, und für Anfänger ist diese Vorstellung die beste.

§. 107.

Die Regel Detri wird gebraucht beym Kauf und Verkauf, denn hier verhält sich die Menge von einerley Waare, die man nach Maaß und Gewicht bestimmt; wie der dafür zu zahlende Preiß. Weiß man demnach, wie viel eine gewisse Menge dieser Waare kostet; so läßt sich für jede andre Menge der Preiß, und für jeden andern gegebenen Preiß die zugehörige Menge der Waare berechnen.

Wenn ein Centner einer gewissen Waare 137 Rthlr. kostet, wie viel kosten 5 Liespfund?

Hier muß man nun wissen, daß ein Liespfund 14 Pfund beträgt. Daher 5 Liespfund = 5. 14 ℔., der Centner aber 110 Pfund enthält. Der Ansatz ist nun folgender:

$$110 \text{ ℔.} - 5.\ 14 \text{ ℔.} = 137 \text{ Rthlr.} : x \text{ Rthlr.}$$

$$\text{folglich } x = \frac{5.\ 14.\ 137}{110} \text{ Rthlr.}$$

Umgekehrt, wenn ein Centner Waare 137 Rthlr. kostet, wie viel erhält man von eben der Waare für 100 Rthlr? Antwort:

137 Rthlr. - 100 Rthlr. = 110 Pf : x Pf.

also $x = \frac{100 \cdot 100}{137}$ Pf.

§. 108.

Ich will hier in einigen Beyspielen noch zeigen, wie man sich allerley brauchbarer Vortheile zur Abkürzung der Rechnung bedienen kann.

1 ℔. kostet 3 gr., wie viel kosten 753 ℔?

Der Ansatz stehet nach oben gegebener Regel so:

1 ℔. : 753 ℔. = 3 ggr. : x.

Da nun 3 gr. in unsern Gelde $\frac{1}{8}$ rthlr. betragen, so finde ich hier x indem ich 753 mit $\frac{1}{8}$ multiplicire, also $x = \frac{753}{8}$ = 94 rthlr. 3 gr.

Wenn das ℔ 2 gr. 4 gr. 6 gr. 8 gr. oder 12 gr. kosten würde, so findet derselbe Vortheil statt, weil der Thaler zu 24 Groschen gerechnet,

2 gr. = $\frac{1}{12}$ rthlr.; 4 gr. = $\frac{1}{6}$ rthlr.; 6 gr. = $\frac{1}{4}$ rthlr. 8 gr = $\frac{1}{3}$ und 12 = $\frac{1}{2}$ rthlr. beträgt.

Eben so finde ich auch, daß:

5 gr. = $\frac{5}{24}$ rthlr. = $\frac{4}{24}$ rthlr. + $\frac{1}{24}$ rthlr. = $\frac{1}{6}$ rthlr. + $\frac{1}{4.6}$ rthlr.; oder auch = 6 gr. - 1 gr. = $\frac{1}{4}$ rthlr. - $\frac{1}{4.6}$ rthlr.; oder auch = 8 gr. - 3 gr. = $\frac{1}{3}$ rthlr. - $\frac{1}{8}$ rthlr.

7 gr. = $\frac{7}{24}$ rthlr. = $\frac{6}{24}$ rthlr. + $\frac{1}{24}$ = $\frac{1}{4}$ rthlr. + $\frac{1}{4.6}$ oder auch 7 gr. = 3 gr. + 4 gr. = $\frac{1}{8}$ rthlr. + $\frac{1}{6}$ rthlr. oder auch = 8 gr. - 1 gr. = $\frac{1}{3}$ rthlr. - $\frac{1}{3.8.}$ rthlr.

9 gr. = $\frac{9}{24}$ rthlr. = $\frac{3}{8}$ rthlr.; oder auch = 6 gr. + 3 gr. = $\frac{1}{4}$ rthlr. + $\frac{1}{2.4}$ rthlr.; oder auch = 8 gr. + 1 gr. = $\frac{1}{3}$ rthlr. + $\frac{1}{3.8}$ rthlr. oder auch = 12 gr. - 3 gr. = $\frac{1}{2}$ rthlr. - $\frac{1}{2.4}$ rthlr.

10 gr. = $\frac{10}{24}$ rthlr. = $\frac{5}{12}$ = gr. 4 gr. = $\frac{1}{4}$ rthlr. + $\frac{1}{6}$ rthlr. = 8 gr. + 2 gr. = $\frac{1}{3}$ rthlr. + $\frac{1}{3.4}$; oder auch = 12 gr. - 2 gr. = $\frac{1}{2}$ rthlr. - $\frac{1}{2.6}$ rthlr.

11 gr. = 10 gr. + 1 gr. $\frac{1}{3}$ rthlr. + $\frac{1}{3.4}$ rthlr. + $\frac{1}{2.12}$ rthlr.; oder auch = $\frac{1}{4}$ rthlr. + $\frac{1}{6}$ rthlr. + $\frac{1}{4.6}$ rthlr. oder auch = 6 gr. + 3 gr. + 2 gr. = = $\frac{1}{4}$ rthlr. + $\frac{1}{2.4}$ rthlr. + $\frac{1}{3.4}$, oder auch = 12 gr. - 1 gr. = $\frac{1}{2}$ rthlr. - $\frac{1}{2.12}$ rthlr.; oder auch = 8 gr. + 3 gr. = = $\frac{1}{3}$ rthlr. + $\frac{1}{8}$ rthlr.

13 gr. = 12 gr. + 1 gr. = $\frac{1}{2}$ rthlr + $\frac{1}{2.12}$ rthlr., oder auch = 8 gr. + 4 gr. + 1 gr. = $\frac{1}{3}$ rthlr. + $\frac{1}{2.3}$ rthlr. + $\frac{1}{4.6}$ rthlr.; oder = $\frac{2}{4}$ rthlr. + $\frac{1}{4.6}$ rthlr.; oder = 16 gr. - 3 gr. = $\frac{2}{3}$ rthlr. - $\frac{1}{8}$ rthlr.

14 gr. = 12 gr. + 2 gr. = $\frac{1}{2}$ rthlr. + $\frac{1}{2.6}$ rthlr.; oder = = 8 gr. + 6 gr. = $\frac{1}{3}$ rthlr. + $\frac{1}{4}$ rthlr. = $\frac{7}{12}$ rthlr.

15 gr. = $\frac{15}{24}$ rthlr. = $\frac{5}{8}$ rthlr. = $\frac{4}{8}$ rthlr. + $\frac{1}{8}$ rthlr. = $\frac{1}{2}$ rthlr. + $\frac{1}{2.4}$ rthlr.

16 gr. = $\frac{16}{24}$ rthlr. = $\frac{2}{3}$ rthlr. = $\frac{3}{3}$ rthlr. - $\frac{1}{3}$ rthlr. = 1 rthlr. - $\frac{1}{3}$ rthlr.; oder = 12 gr. + 4 gr. = $\frac{1}{2}$ rthlr. + $\frac{1}{2.3}$ rthlr.

17 gr. = 12 gr. + 4 gr. + 1 gr. = $\frac{1}{2}$ rthlr. + $\frac{1}{2.3}$ rthlr. + $\frac{1}{4.6}$ rthlr.; oder auch = 16 gr. + 1 gr. = $\frac{2}{3}$ rthl. + $\frac{1}{3.8}$ rthlr.

18 gr. = $\frac{18}{24}$ rthlr. = $\frac{3}{4}$ rthlr. = $\frac{4}{4}$ rthlr. − $\frac{1}{4}$ rthlr. = 1 rthlr. − $\frac{1}{4}$ rthlr.; oder = 12 gr. + 6 gr. = $\frac{1}{2}$ rthlr. + $\frac{1}{2.2}$ rthlr.

19 gr. = 12 gr. + 6 gr. + 1 gr. = $\frac{1}{2}$ rthlr. + $\frac{1}{2.2}$ rthlr. + $\frac{1}{4.6}$ rthlr. oder = 18 gr. + 1 gr. = $\frac{3}{4}$ rthlr. + $\frac{1}{4.6}$ rthlr. oder = 20 gr. − 1 gr. = $\frac{5}{6}$ rthlr. − $\frac{1}{4.6}$ rthlr.

20 gr. = $\frac{20}{24}$ rthlr. = $\frac{5}{6}$ rthlr. = $\frac{6}{6}$ rthlr. − $\frac{1}{6}$ rthlr. = 1 rthlr. − $\frac{1}{6}$ rthlr.; oder = $\frac{3}{6}$ rthlr. + $\frac{2}{6}$ rthlr. = $\frac{1}{2}$ rthlr. + $\frac{1}{3}$ rthlr.

21 gr. = $\frac{21}{24}$ rthlr. = $\frac{7}{8}$ rthlr. = $\frac{8}{8}$ rthlr. − $\frac{1}{8}$ rthlr. = 1 rthlr. − $\frac{1}{8}$ rthlr.; oder = $\frac{4}{8}$ rthlr. + $\frac{2}{8}$ rthlr. + $\frac{1}{8}$ rthlr. = $\frac{1}{2}$ rthlr. + $\frac{1}{2.2}$ rthlr. + $\frac{1}{2.4}$ rthlr.; oder = 12 gr. + 8 gr. + 1 gr. = $\frac{1}{2}$ rthlr. + $\frac{1}{3}$ rthlr. + $\frac{1}{3.8}$ rthlr.

22 gr. = 1 rthlr. − 2 gr. = 1 rthlr. − $\frac{1}{12}$ rthlr.; oder = 20 gr. + 2 gr. = $\frac{5}{6}$ rthlr. + $\frac{1}{2.6}$ rthlr. = $\frac{3}{6}$ rthlr. + $\frac{2}{6}$ rthlr. + $\frac{1}{2.6}$ rthlr. = $\frac{1}{2}$ rthlr. + $\frac{1}{3}$ rthlr. + $\frac{1}{3.4}$ rthlr.

23 gr. = 1 rthlr. − 1 gr. = 1 rthlr. − $\frac{1}{24}$ rthlr.; oder = 20 gr. + 3 gr. = = $\frac{5}{6}$ rthlr. + $\frac{1}{8}$ rthlr. = $\frac{3}{6}$ rthlr. + $\frac{2}{6}$ rthlr. + $\frac{1}{8}$ rthlr. = = $\frac{1}{2}$ rthlr. + $\frac{1}{3}$ rthlr. + $\frac{1}{2.4}$ rthlr.

§. 109.

Pfennige, deren 12 auf einen Groschen gehen, geben folgende Reductionen zu höhern Einheiten.

1 pf. = $\frac{1}{12}$ gr. = $\frac{1}{2.12.12}$ rthlr. = $\frac{1}{12.4.6}$ rthlr.

2 pf. = $\frac{1}{6}$ gr. = $\frac{1}{12.12}$ rthlr.

3 pf.

3 pf. $= \frac{1}{4}$ rthlr. $= \frac{1}{8.12}$ rthlr.

4 pf. $= \frac{1}{3}$ gr. $= \frac{1}{6.12}$ rthlr. $= \frac{1}{8.9}$

5 pf. $= \frac{5}{12}$ gr. $= \frac{4}{12}$ gr. $+ \frac{1}{12}$ gr. $= \frac{1}{3}$ gr. $+ \frac{1}{3.4}$ gr.; oder $= \frac{3}{12}$ gr. $+ \frac{2}{12}$ gr. $= \frac{1}{4}$ gr. $+ \frac{1}{6}$ gr.; $= \frac{1}{6.12}$ rthlr. $+ \frac{1}{4.6.12}$ rthlr.; oder $= \frac{1}{2}$ gr. $- \frac{1}{2.6}$ gr. $= \frac{1}{6.8}$ rthlr. $- \frac{1}{6.6.8}$ rthlr.

6 pf. $= \frac{1}{2}$ gr. $= \frac{1}{6.8}$ rthlr.

7 pf. $=$ 6 pf. $+$ 1 pf. $= \frac{1}{2}$ gr. $+ \frac{1}{2.6}$ gr. $= \frac{1}{6.8}$ rthlr. $+ \frac{1}{6.6.8}$ rthlr.; oder $=$ 3 pf. $+$ 4 pf. $= \frac{1}{4}$ gr. $+ \frac{1}{3}$ gr. $= \frac{1}{8.12}$ rthlr. $+ \frac{1}{6.12}$ rthlr. $= \frac{1}{12} (\frac{1}{8} + \frac{1}{6})$ rthlr.

8 pf. $= \frac{2}{3}$ gr. $=$ 1 gr. $- \frac{1}{3}$ gr. $= \frac{1}{6.6}$ rthlr. $=$ $= \frac{1}{4.9}$ rthlr. $= \frac{3}{3.12}$ rthlr.

9 pf. $= \frac{3}{4}$ gr. $=$ 1 gr. $- \frac{1}{4}$ gr. $= \frac{1}{4.8}$ rthlr.

10 pf $= \frac{5}{6}$ gr. $= \frac{3}{6}$ gr. $+ \frac{2}{6}$ gr. $= \frac{1}{2}$ gr. $+ \frac{1}{3}$ gr. $= \frac{1}{4.12}$ rthlr. $+ \frac{1}{6.12}$ rthlr. $= \frac{1}{12}(\frac{1}{4} + \frac{1}{6})$ rthlr.; oder $=$ 1 gr. $- \frac{5}{6}$ gr. $= \frac{1}{24}$ rthlr. $- \frac{1}{6.24}$ rthlr.

11 pf. $=$ 10 pf. $+$ 1 pf. $= \frac{5}{6}$ gr. $+ \frac{1}{2.6}$ gr $=$ $= \frac{1}{12} (\frac{1}{4} + \frac{1}{6})$ rthlr. $+ \frac{1}{12.24}$ rthlr. $= \frac{1}{12} (\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4.6})$ rthlr. oder $=$ 6 pf. $+$ 3 pf. $+$ 2 pf. $= \frac{1}{2}$ gr. $+ \frac{1}{4}$ gr. $+ \frac{1}{2.3}$ gr. $= \frac{1}{4.12}$ rthlr. $+ \frac{1}{8.12}$ rthlr. $+ \frac{1}{12.12}$ rthlr. $= \frac{1}{12} (\frac{1}{4} + \frac{1}{2.4} + \frac{1}{3.4})$ rthlr. oder $=$ 6 pf. $+$ 4 pf. $+$ 1 pf. $= \frac{1}{2}$ gr. $+ \frac{1}{3}$ gr. $+ \frac{1}{3.4}$ gr. oder $=$ 1 gr. $- \frac{1}{12}$ gr. $=$ $= (\frac{1}{24} - \frac{1}{12.24})$ rthlr. $= \frac{1}{24} (1 - \frac{1}{12})$ rthlr.

§. 110.

Da diese Reductionen der niedern Einheiten zu höhern für jeden äusserst wichtig sind, so will ich hier Anfängern zum besten, noch folgende Reductionen mittheilen, der Thaler zu 36 Mariengroschen à 8 pf.

1 gr.

1 gr. = $\frac{1}{3.12}$ rthlr. = $\frac{1}{4.9}$ rthlr. = $\frac{1}{6.6}$ rthlr.
2 gr. = $\frac{1}{2.9}$ rthlr. = $\frac{1}{3.6}$ rthlr.
3 gr. = $\frac{1}{3.4}$ rthlr. = $\frac{1}{2.6}$ rthlr.
4 gr. = $\frac{1}{9}$ rthlr.
5 gr. = $\frac{1}{9}$ rthlr. + $\frac{1}{4.9}$ rthlr.
6. gr. = $\frac{1}{6}$ rthlr.
7 gr. = $\frac{1}{6}$ rthlr. + $\frac{1}{6.6}$ rthlr.; oder = $\frac{1}{9}$ rthlr. + $\frac{1}{12}$ rthlr.
8 gr. = $\frac{1}{6}$ + $\frac{1}{3.6}$ rthlr.; oder = $\frac{2}{9}$ rthlr.
9 gr. = $\frac{1}{4}$ rthlr.
10 gr. = $\frac{1}{4}$ rthlr. + $\frac{1}{4.9}$ rthlr.
11 gr. = $\frac{1}{6}$ rthlr. + $\frac{1}{2.6}$ rthlr. + $\frac{1}{3.6}$ rthlr.; oder = $\frac{1}{6}$ rthlr. + $\frac{1}{9}$ rthlr. + $\frac{1}{4.9}$ rthlr.
12 gr. = $\frac{1}{3}$ rthlr.
13 gr. = $\frac{1}{4}$ rthlr. + $\frac{1}{9}$ rthlr.
14 gr. = $\frac{1}{3}$ rthlr. + $\frac{1}{3.6}$ rthlr.; oder = $\frac{7}{18}$ rthlr.
15 gr. = $\frac{5}{12}$ = rthlr. = $\frac{1}{3}$ rthlr. + $\frac{1}{3.4}$ rthlr. = $\frac{1}{4}$ rthlr. + $\frac{1}{6}$ rthlr.
16 gr. = $\frac{4}{9}$ rthlr. = $\frac{1}{3}$ rthlr. + $\frac{1}{9}$ rthlr.
17 gr. = $\frac{1}{3}$ rthlr. + $\frac{1}{9}$ rthlr. + $\frac{1}{4.9}$ rthlr. = $\frac{4}{9}$ rthlr. + $\frac{1}{4.9}$ rthlr.
18 gr. = $\frac{1}{2}$ rthlr.
19 gr. = $\frac{1}{2}$ rthlr. + $\frac{1}{2.18}$ rthlr.; oder = $\frac{1}{3}$ rthlr. + $\frac{1}{6}$ rthlr. + $\frac{1}{6.6}$ rthlr.; oder = $\frac{1}{3}$ rthlr. + $\frac{1}{9}$ rthl. + $\frac{1}{3.4}$ rthlr.
20 gr. = $\frac{1}{2}$ rthlr. + $\frac{1}{2.9}$ rthlr. $\frac{5}{9}$ rthlr.
21 gr. = $\frac{7}{12}$ rthlr. = $\frac{1}{2}$ rthlr. + $\frac{1}{2.6}$ rthlr. $\frac{1}{3}$ rthlr. + $\frac{1}{4}$ rthlr. = 1 rthlr. − $\frac{5}{12}$ rthlr.
22 gr. = $\frac{1}{2}$ rthlr. + $\frac{1}{9}$ rthlr.

23 gr. $= \frac{1}{2}$ rthlr. $+ \frac{1}{9}$ rthlr. $+ \frac{1}{4.9}$ rthlr.

24 gr. $= \frac{2}{3}$ rthlr. $= 1$ rthlr. $- \frac{1}{3}$ rthlr.

25 gr. $= \frac{2}{3}$ rthlr. $+ \frac{1}{3.12}$ rthlr. $= (2 + \frac{1}{12}) \frac{1}{3}$ rthlr. $= \frac{1}{2}$ rthlr. $+ \frac{1}{6}$ rthlr. $+ \frac{1}{6.6}$ rthlr.

26 gr. $= \frac{1}{2}$ rthlr. $+ \frac{1}{6}$ rthlr. $+ \frac{2}{3.6}$ rthlr.

27 gr. $= \frac{3}{4}$ rthlr. $= \frac{1}{2}$ rthlr. $+ \frac{1}{2.2}$ rthlr. $= 1$ rthlr. $- \frac{1}{4}$ rthlr.

28 gr. $= \frac{7}{9}$ rthlr. $(1 - \frac{2}{9})$ rthlr. $= \frac{2}{3}$ rthlr. $+ \frac{1}{9}$ rthlr. $= (2 + \frac{1}{3}) \frac{1}{3}$ rthlr. $= \frac{1}{2}$ rthlr. $+ \frac{1}{4}$ rthlr. $+ \frac{1}{4.9}$ rthlr.

29 gr. $= \frac{1}{2}$ rthlr. $+ \frac{1}{4}$ rthlr. $+ \frac{1}{2.9}$ rthlr. $= (7 + \frac{1}{4}) \frac{1}{9}$ rthlr.

30 gr. $= \frac{5}{6}$ rthlr. $= 1$ rthlr. $- \frac{1}{6}$ rthlr. $= \frac{1}{2}$ rthlr. $+ \frac{1}{3}$ rthlr.

31 gr. $= (\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3.12})$ rthlr. $= \frac{5}{6}$ rthlr. $+ \frac{1}{6.6}$ rthlr.

32 gr. $= \frac{8}{9}$ rthlr. $= 1$ rthlr. $- \frac{1}{9}$ rthlr.

33 gr. $= \frac{11}{12}$ rthlr. $= 1$ rthlr. $- \frac{1}{12}$ rthlr. $= \frac{1}{2}$ rthlr. $+ \frac{1}{2.2}$ rthlr. $+ \frac{1}{2.3}$ rthlr.

34 gr. $= \frac{17}{18}$ rthlr. $= 1$ rthlr. $- \frac{1}{18}$ rthlr.

35 gr. $= 1$ rthlr. $- \frac{1}{2.18}$ rthlr. $= \frac{1}{2}$ rthlr. $+ \frac{1}{3}$ rthlr. $+ \frac{1}{9}$ rthlr. $+ \frac{1}{4.9}$ rthlr.

1 pf. $= \frac{1}{8}$ gr. $= \frac{1}{8.8.6}$ rthlr. $= \frac{1}{8.4.9}$ rthlr. $= \frac{1}{8.3.12}$ rthlr.

2 pf. $= \frac{1}{4}$ gr. $= \frac{1}{8.3.6}$ rthlr. $= \frac{1}{8.2.9}$ rthlr. $= \frac{1}{8.18}$ rthlr. $= \frac{1}{4.6.6}$ rthlr.

3 pf. $= \frac{3}{8}$ gr. $= \frac{1}{4}$ gr. $+ \frac{1}{8}$ gr. $= \frac{1}{8.18}$ rthlr. $+ \frac{1}{8.2.18}$ rthlr. $= (\frac{1}{16} + \frac{1}{16.2}) \frac{1}{9}$ rthlr.

4 pf. $= \frac{1}{2}$ gr. $= \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 9}$ rthlr. $= \frac{1}{2 \cdot 6 \cdot 6}$ rthlr. $= \frac{1}{8 \cdot 9}$ rthlr.

5 pf. $= \frac{1}{2}$ gr. $+ \frac{1}{2 \cdot 4}$ gr. $= \frac{1}{8 \cdot 8 \cdot 9}$ rthlr. $+ \frac{1}{4 \cdot 8 \cdot 9}$ rthlr. $= (\frac{1}{2} + \frac{1}{8}) \frac{1}{36}$ rthlr. $= (\frac{1}{4} + \frac{1}{4 \cdot 4}) \frac{1}{18}$ rthlr. $= (\frac{1}{7} + \frac{1}{4 \cdot 8}) \frac{1}{9}$ rthlr.

6 pf. $= \frac{3}{4}$ gr. $= (1 - \frac{1}{4})$ rthlr. $= \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 4}$ rthlr. $= \frac{1}{4 \cdot 12}$ rthlr.

7 pf. $= \frac{7}{8}$ gr $= 1$ gr. $- \frac{1}{8}$ gr. $= \frac{1}{4 \cdot 12}$ rthlr $+ \frac{1}{8 \cdot 3 \cdot 12}$ rthlr. $= (\frac{1}{4} + \frac{1}{4 \cdot 6}) \frac{1}{12}$ rthlr. $= (\frac{1}{8} + \frac{1}{8 \cdot 6}) \frac{1}{6}$ rthlr.

§. 111.

Jetzt noch Beyspiele, die zeigen sollen, wie jene Reductionen vortheilhaft angewendet werden.

1 ℔. kostet 13 gute Groschen, wie viel kosten 279 ℔?

da 13 gr. $= \frac{1}{2}$ rthlr. $+ \frac{1}{2 \cdot 12}$ rthlr. ist, so rechnet man wie folget:

```
    279 rthlr.
2)  ──────────
    139 rthlr. 12 gr. = ½.279 rthlr.
12)  11 rthlr. 15 gr. = 1/12.(139 rthlr. + 12 gr.)
   ─────────────────
    151 rthlr.  3 gr. = (½ + 1/(2.12)).279 rthlr.
```

Es ist nemlich hier erst die Hälfte von 279 genommen, diese beträgt 139 rthlr. 12 gr.; diese Zahlen wiederum mit 12 dividirt, giebt 11 rthl. 15 gr. beyde Zahlen zusammen addirt, geben 151 rthlr. 3 gr. welches das richtige Resultat ist.

Die Richtigkeit des Verfahrens wird man leicht einsehen, wenn man bedenkt, daß man hier 279 mit $\frac{13}{24}$ rthlr. multipliciren muß, um das gesuchte Facit zu haben, ich nehme daher statt $\frac{13}{24}$ rthlr. ein gleiches $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 12})$ rthlr. und multiplicire 279 damit, so erhalte ich eben.

ebenfalls das Verlangte, und zwar ist allerdings die letztere Multiplication leichter als die erstere.

Da $\frac{1}{2}$ rthlr. + $\frac{1}{2.12}$ rthlr. = $\frac{1}{2}$ $(1 + \frac{1}{12})$ rthlr. ist, so hätte man auch so rechnen können:

$$\begin{array}{rl} & 279 \text{ rthlr.} \\ 12) & 23 \text{ rthlr. } 6 \text{ gr. addirt.} \\ \hline & 302 \text{ rthlr. } 6 \text{ gr.} = (1 + \frac{1}{12}) \cdot 279 \text{ rthlr.} \\ 2) & \\ \hline & 151 \text{ rthlr. } 3 \text{ gr.} = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{12}) \cdot 279 \text{ rthlr.} \end{array}$$

Die 279 ℔. betrachte ich blos als eine unbekannte Zahl, weil die Benennung ℔. sich durch die Division, mit dem ersten Gliede 1 ℔. würde aufgehoben haben, und da muß allerdings das Produkt $(\frac{1}{2}$ rthlr. + $\frac{1}{1.12}$ rthlr$) \cdot 279$ $= \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{12})$ rthlr. $279 = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{12}) \cdot 1$ rthlr. 279 $= \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{12}) \cdot 279$ rthlr. Thaler und Theile des Thalers zum Resultate geben. Aus dieser Vorstellung erhellet zugleich, daß ich auch 279 als so viel Thaler betrachten, und den andern Faktor $\frac{1}{2}(1 + \frac{1}{12})$ als unbenennt ansehen darf; diese Verwechselung der Benennung ist zwar nicht nothwendig, aber doch zu empfehlen, weil in den meisten Fällen, wie hier 279 der Multiplicandus, und $\frac{1}{2}$ rthlr. : $\frac{1}{12}$ rthlr. den Multiplicator bedeuten, und dieser letzte muß immer unbenannt seyn. Weil eine Sache, Thaler mal nehmen, keinen Sinn hat, wol aber der umgekehrte Fall.

Was ich hier bey diesem Exempel erinnert habe gilt bey allen folgenden, und ist wichtig, da in den gewöhnlichen Rechenbüchern, selten die Gründe des Verfahrens gezeigt werden. Da 13 gr. auch = $\frac{1}{3}$ rthlr. + $\frac{1}{2.6}$ rthlr. + $\frac{1}{4.6}$ rthlr. ist, so stehet hiernach die Rechnung wie folget.

279 rthlr.

3) ―――――

93 rthlr. $= \frac{1}{3}$ rthlr.. 279 rthlr.

2) 46 rthlr. 12 gr. $= \frac{1}{2} \cdot$ 93 rthlr.

4) 11 rthlr. 15 gr. $= \frac{1}{4} \cdot$ 46 rthlr. 12 gr.

――――――――― addirt.

151 rthlr. 3 gr. $= (\frac{1}{3} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{4 \cdot 6}) \cdot$ 279 rthlr.

Diese Rechnung ist nicht so kurz, als die vorhergehende, doch läßt sich auch hier noch eine Veränderung anbringen, die aber im Wesentlichen, mit dieser übereinkömmt. Nemlich: $\frac{1}{3} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{4 \cdot 6} = \frac{1}{3}(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 4})$, und hiernach stehet die Rechnung so:

279 rthlr. $= 1 \cdot$ 279 rthlr.

2) 139 rthlr 12 gr. $= \frac{1}{2} \cdot$ 279 rthlr.

4) 34 rthlr 21 gr. $= \frac{1}{4} \cdot$ 139 rthlr. 12 gr.

――――――――― addirt.

453 rthlr. 9 gr. $= (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 4}) \cdot$ 279 rthlr.

3) ―――――

151 rthlr. 3 gr. $= \frac{1}{3}(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 4}) \cdot$ 279 rthlr.

―――

1 ℔. kostet 5 gr. was kosten 552 ℔.?

Da , , 5 gr. $= \frac{1}{6}$ rthlr. $+ \frac{1}{4 \cdot 6}$ rthlr.

oder , $= \frac{1}{4}$ rthlr. $- \frac{1}{4 \cdot 6}$ rthlr.

oder , $= \frac{1}{3}$ rthlr. $- \frac{1}{8}$ rthlr.

so finden folgende drey verschiedene Rechnungen statt.

552 rthlr.

6) ―――――

92 rthlr. $= \frac{1}{6} \cdot$ 552 rthlr.

4) 23 rthlr. $= \frac{1}{4} \cdot$ 92 rthlr.

――――――― addirt.

Facit , 115 rthlr. $= (\frac{1}{6} + \frac{1}{4 \cdot 6}) \cdot$ 552 rthlr.

$$4)\ \frac{552\ \text{rthlr.}}{138\ \text{rthlr.} = \frac{1}{4}\cdot 552\ \text{rthlr.}}$$

$$6)\ 23\ \text{rthlr.} = \frac{1}{6}\cdot 138\ \text{rthlr.}$$

subtrahirt.

Facit: $115\ \text{rthlr.} = (\frac{1}{4} - \frac{1}{4.6})\cdot 552\ \text{rthlr.}$

$$3)\ \frac{552\ \text{rthlr.}}{184\ \text{rthlr.} = \frac{1}{3}\cdot 552\ \text{rthlr.}}$$

$$8)\ 69\ \text{rthlr.} = \frac{1}{8}\cdot 552\ \text{rthlr.}$$

subtrahirt.

Facit: $115\ \text{rthlr.} = (\frac{1}{3} - \frac{1}{8})\cdot 552\ \text{rthlr.}$

Alle diese drey Arten sind gleich kurz, und keine hat vor der andern im allgemeinen Vorzüge, aber gut ist es, wenn sich ein Anfänger eine Fertigkeit in allen Arten zu erwerben sucht.

---

1 Stück kostet 7 gr. wie viel kosten 288 Stück?

Da , 7 gr. $= \frac{1}{4}$ rthlr. $+ \frac{1}{4.6}$ rthlr.
oder , $= \frac{1}{8}$ rthlr. $+ \frac{1}{6}$ rthlr.
oder , $= \frac{1}{3}$ rthlr. $- \frac{1}{3.8}$ rthlr.

so kann man hier auf folgende 3 Arten rechnen.

$$4)\ \frac{288\ \text{rthlr.}}{72\ \text{rthlr.} = \frac{1}{4}\cdot 288\ \text{rthlr.}}$$

$$6)\ 12\ \text{rthlr.} = \frac{1}{6}\cdot 72\ \text{rthlr.}$$

addirt.

Facit: $84\ \text{rthlr.} = (\frac{1}{4} + \frac{1}{4.6})\cdot 288\ \text{rthlr.}$

$$8)\ \frac{288\ \text{rthlr.}}{36\ \text{rthlr.} = \frac{1}{8}\cdot 288\ \text{rthlr.}}$$

$$6)\ 48\ \text{rthlr.} = \frac{1}{6}\cdot 288\ \text{rthlr.}$$

addirt.

Facit: $84\ \text{rthlr.} = (\frac{1}{8} + \frac{1}{6})\cdot 288.\ \text{rthlr.}$

$$\begin{array}{l} 288 \text{ rthlr.} \\ 3) \overline{} \\ 96 \text{ rthlr.} = \frac{1}{3} \cdot 288 \text{ rthlr.} \\ 8) \; 12 \text{ rthlr.} = \frac{1}{8} \cdot 96 \text{ rthlr.} \end{array}$$

subtrahirt.

Facit: $48 \text{ rthlr.} = (\frac{1}{3} - \frac{1}{3.8}) \cdot 288 \text{ rthlr.}$

---

1 Fuß kostet 9 gr. was kosten 881 Fuß?

Da 9 gr. $= \frac{3}{8}$ rthlr.

oder , $= \frac{1}{4}$ rthlr. $+ \frac{1}{2.4}$ rthlr.

oder , $= \frac{1}{3}$ rthlr. $+ \frac{1}{3.8}$ rthlr.

oder , $= \frac{1}{2}$ rthlr. $- \frac{1}{2.4}$ rthlr.

so sind hiernach folgende 4 verschiedene Rechnungen möglich.

$$\begin{array}{l} 881 \text{ rthlr.} \cdot 3 \\ 2643 \text{ rthlr.} = 3 \cdot 881 \text{ rthlr.} \\ 8) \end{array}$$

Facit: $330 \text{ rthlr. } 9 \text{ gr.} = \frac{3}{8} \cdot 881 \text{ rthlr.}$

$$\begin{array}{l} 881 \text{ rthlr.} \\ 4) \\ 220 \text{ rthlr. } 6 \text{ gr.} = \frac{1}{4} \cdot 881 \text{ rthlr.} \\ 2) \; 110 \text{ rthlr. } 3 \text{ gr.} = \frac{1}{2} \cdot 220 \text{ rthlr. } 6 \text{ gr.} \end{array}$$

Facit: $330 \text{ rthlr. } 9 \text{ gr} = (\frac{1}{4} + \frac{1}{2.4}) \cdot 881 \text{ rthlr.}$

$$\begin{array}{l} 881 \text{ rthlr.} \\ 3) \\ 293 \text{ rthlr. } 16 \text{ gr.} = \frac{1}{3} \cdot 881 \text{ rthlr.} \\ 8) \; 36 \text{ rthlr. } 17 \text{ gr.} = \frac{1}{8} \cdot 293 \text{ rthlr. } 16 \text{ gr.} \end{array}$$

Facit: $330 \text{ rthlr. } 9 \text{ gr.} = (\frac{1}{3} + \frac{1}{3.8}) \cdot 881 \text{ rthlr.}$

$$\begin{array}{l} 881 \text{ rthlr.} \\ 2) \\ 440 \text{ rthlr. } 12 \text{ gr.} = \frac{1}{2} \cdot 881 \text{ rthlr.} \\ 4) \; 110 \text{ rthlr. } 3 \text{ gr.} = \frac{1}{4} \cdot 400 \text{ rthlr. } 12 \text{ gr.} \end{array}$$

Facit: $330 \text{ rthlr. } 9 \text{ gr.} = (\frac{1}{2} - \frac{1}{2.4}) \cdot 881 \text{ rthlr.}$

In den meisten Fällen möchte hier die erste Art den Vorzug verdienen, nach ihr folgt die 2te und 4te Art, denn diese haben die kleinsten Divisoren.

---

1 ℔. kostet 11 gr. wie viel kosten 2137 ℔.?

Nun sind 11 gr. = $\frac{1}{3}$ rthlr. + $\frac{1}{8}$ rthlr.
oder , = $\frac{1}{2}$ rthlr. − $\frac{1}{2.12}$ rthlr.
oder , = $\frac{1}{3}$ rthlr. + $\frac{1}{3.4}$ rthlr. + $\frac{1}{2.12}$ rthlr.
oder , = $\frac{1}{4}$ rthlr. + $\frac{1}{6}$ rthlr. + $\frac{1}{4.6}$ rthlr.
oder , = $\frac{1}{4}$ rthlr. + $\frac{1}{2.4}$ rthlr. + $\frac{1}{3.4}$ rthlr.

Demnach haben wir 5 verschiedene Rechnungen, wie folget.

3) 2137 rthlr.
712 rthlr. 8 gr. = $\frac{1}{3}$. 2137 rthlr.
8) 267 rthlr. 3 gr. = $\frac{1}{8}$. 2137 rthlr.

Facit: 979 rthlr. 11 gr. = $(\frac{1}{3} + \frac{1}{8})$. 2137 rthlr.

3) 2137 rthlr.
712 rthlr. 8 gr. = $\frac{1}{3}$. 2137 rthlr.
4) 178 rthlr. 2 gr. = $\frac{1}{4}$. 712 rthlr. 8 gr.
2) 89 rthlr. 1 gr. = $\frac{1}{2}$. 178 rthlr. 2 gr.

Facit: 979 rthlr. 11 gr. = $(\frac{1}{3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{2.12})$. 2137 rthlr.

4) 2137 rthlr.
534 rthlr. 6 gr. = $\frac{1}{4}$. 2137 rthlr.
6) 356 rthlr. 4 gr. = $\frac{1}{6}$. 2137 rthlr.
4) 89 rthlr. 1 gr. = $\frac{1}{4}$. 356 rthlr. 4 gr.

Facit: 979 rthlr. 11 gr. = $(\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4.6})$. 2137 rthl.

2137 rthlr.
4) ――――――――
534 rthlr. 6 gr. = $\frac{1}{4}$. 2137 rthlr.
2) 267 rthlr. 3 gr. = $\frac{1}{2}$. 534 rthlr. 6 gr.
3) 178 rthlr. 2 gr. = $\frac{1}{3}$. 534 rthlr. 6 gr.
――――――――

Facit: 979 rthlr. 11 gr. = $(\frac{1}{4}+\frac{1}{2\cdot4}+\frac{1}{3\cdot4})$ 2137. rth.

2137 rthlr.
2) ――――――――
1068 rthlr. 12 gr. = $\frac{1}{2}$. 2137 rthlr.
12) 89 rthlr. 1 gr. = $\frac{1}{12}$. 1068 rthlr. 12 gr.
――――――――

Facit: 979 rthlr. 11 gr. = $(\frac{1}{2}-\frac{1}{1\cdot12})$. 2137 rthlr.

Die erste Art verdient hier wol den Vorzug, dann folgt die letzte, und auf diese die andern, wie sie hier folgen.

---

1 Stück kostet 14 gr. wie theuer sind 1727 Stück?

14 gr. sind = $\frac{1}{2}$ rthlr. + $\frac{1}{2\cdot6}$ rthlr.
oder = $\frac{1}{3}$ rthlr. + $\frac{1}{4}$ rthlr.
oder = $\frac{7}{12}$ rthlr.

1757 rthlr.
2) ――――――――
863 rthlr. 12 gr. = $\frac{1}{2}$. 1727 rthlr.
6) 143 rthlr. 22 gr. = $\frac{1}{6}$. 863 rthlr. 12 gr.
――――――――

Facit: 1007 rthlr. 10 gr. = $(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot6})$. 1727 rthlr.

1727 rthlr.
3) ――――――――
575 rthlr. 16 gr. = $\frac{1}{3}$. 1727 rthlr.
4) 431 rthlr. 18 gr. = $\frac{1}{4}$. 1727 rthlr.
――――――――

Facit: 1007 rthlr. 10 gr. = $(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})$. 1727 rthlr.

1727 rthlr.
dividirt mit 12) ――――――――
143 rthlr. 22 gr.
―――――――― 7 multipl.

Facit: • 1007 rthlr. 10 gr.

Diese

Diese letzte Art erspart zwar eine Addition, allein da mit 12. dividiren, und diesen Quotienten wiederum mit 7. multipliciren offenbar in vielen Fällen schwieriger seyn dürfte, als blos mit 3 und 4 dividiren, und diese Quotienten zu addiren, so verdienen die 2 ersten Arten wol im allgemeinen den Vorzug.

---

1 Schock kostet 15 gr., wie viel kosten 935 Schock?

15 gr. = $\frac{5}{8}$ rthlr.
oder = $\frac{1}{2}$ rthlr. + $\frac{1}{2.4}$ rthlr.

935 rthlr.
——— 5 multipl.
4675
dividirt 8) ———
584 rthlr. 9 gr. das gesuchte Facit.

935 rthlr.
2) ———
467 rthlr. 12 gr. = $\frac{1}{2}$. 935 rthlr.
4) 116 rthlr. 21 gr. = $\frac{1}{4}$. 467 rthlr. 12 gr.
Facit: 584 rthlr. 9 gr. = ($\frac{1}{2}$ + $\frac{1}{2.4}$). 935 rthlr.

---

1 Schock kostet 16 gr., wie viel werden 787 Schock kosten?

Es sind 16 gr. = $\frac{2}{3}$ rthlr.
oder = 1 rthlr. - $\frac{1}{3}$ rthlr.
oder = $\frac{1}{2}$ rthlr. + $\frac{1}{2.3}$ rthlr.

787 rthrl.
——— 2 multipl.
1574
3.) ———
524 rthlr. 16 gr. gleich dem gesuchten Resultate.

787 rthlr.
3) 262 rthlr. 8 gr. = $\frac{1}{3}$ · 787 rthlr.

Facit: 524 rthlr. 16 gr. = $(1 - \frac{1}{3})$ · 787 rthlr.

787 rthlr.
2)
393 rthlr. 12 gr. = $\frac{1}{2}$ · 787 rthlr.
3) 131 rthl. 4 gr. = $\frac{1}{3}$ · 393 rthl. 12 gr.

Facit: 524 rthrl. 16 gr. = $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2.3})$ · 787 rthrl.

Die beyden ersten Arten verdienen den Vorzug.

---

1 Schock kostet 17 gr. was kosten 432 Schock?

17 gr. sind gleich $\frac{1}{2}$ rthlr. + $\frac{1}{2.3}$ rthlr. + $\frac{1}{4.6}$ rthlr.
oder = $\frac{2}{3}$ rthlr. + $\frac{1}{3.8}$ rthlr.

432 rthlr.
2)
216 rthlr. = $\frac{1}{2}$ · 432 rthlr.
3) 72 rthlr. = $\frac{1}{3}$ · 216 rthlr.
4) 18 rthlr. = $\frac{1}{4}$ · 72 rthlr.

Facit: 406 rthlr. = $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{4.6})$ · 432 rthlr.

432 rthlr.
3)
144 rthlr. = $\frac{1}{3}$ · 432 rthlr.
(2
288 rthlr. = 2 · 144 rthlr.
8) 18 rthlr. = $\frac{1}{8}$ · 144 rthlr.

Facit: 306 rthlr. = $(\frac{2}{3} + \frac{1}{3.8})$ · 432 rthlr.

---

1 Loth kostet 18 gr. was kosten 653 Loth?

18 gr. = $\frac{3}{4}$ rthlr.
oder = 1 rthlr − $\frac{1}{4}$ rthlr.
oder = $\frac{1}{2}$ rthlr. + $\frac{1}{2.2}$ rthlr.

653 rthlr.
——— 3 multipl.
1959 rthlr.
dividirt 4) ———
Facit: 489 rthlr. 18 gr. = $\frac{3}{4}$. 653 rthlr.

653 rthlr.
4) 163 rthlr. 6 gr. = $\frac{1}{4}$. 653 rthlr.
———
Facit: 489 rthlr. 18 gr. = $(1 - \frac{1}{4})$. 653 rthlr.

653 rthlr.
2) ———
326 rthlr. 12 gr. = $\frac{1}{2}$. 653 rthlr.
2) 163 rthlr. 6 gr. = $\frac{1}{2}$. 326 rthlr. 12 gr.
———
Facit 489 rthlr. 18 gr. = $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2.2})$. 653 rthlr.

---

1 Loth kostet 19 gr. wie viel kosten 523 Loth?

19 gr. = $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2.2} + \frac{1}{4.6})$ rthlr.
oder = $(\frac{3}{4} + \frac{1}{4.6})$ rthlr.
oder = $(\frac{5}{6} - \frac{1}{4.6})$ rthlr.

523 rthlr.
2) ———
261 rthlr. 12 gr. = $\frac{1}{2}$. 523 rthlr.
2) 130 rthlr. 18 gr. = $\frac{1}{2}$. 261 rthlr. 12 gr.
6) 21 rthlr. 19 gr. = $\frac{1}{6}$. 130 rthlr. 18 gr.
———
Facit: 414 rthlr. 1 gr. = $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2.2} + \frac{1}{4.6})$. 523 rthl.

523 rthlr.
dividirt 4) ———
130 rthlr. 18 gr. = $\frac{1}{4}$. 523 rthlr.
——— 3 multipl.
362 rthlr. 6 gr. = $\frac{3}{4}$. 523 rthlr.
6) 21 rthlr. 19 gr. = $\frac{1}{6}$. 130 rthlr. 18 gr.
———
Facit: 414 rthlr. 1 gr. = $(\frac{3}{4} + \frac{1}{4.6})$. 523 rthlr.

$$\begin{array}{l} \quad 523 \text{ rthlr.} \\ 6) \overline{\quad\quad\quad\quad\quad} \\ \quad 87 \text{ rthlr. } 4 \text{ gr.} = \frac{1}{6} \cdot 523 \text{ rthlr.} \\ \overline{\quad\quad\quad\quad\quad} (5 \\ 435 \text{ rthlr. } 20 \text{ gr.} = \frac{5}{6} \cdot 523 \text{ rthlr.} \\ 4) \; 21 \text{ rthlr. } 19 \text{ gr.} = \frac{1}{4} \cdot 87 \text{ rthlr. } 4 \text{ gr.} \\ \overline{\quad\quad\quad\quad\quad} \\ \text{Facit: } 414 \text{ rthlr. } 1 \text{ gr.} = (\frac{5}{6} + \frac{1}{4.6}) \cdot 523 \text{ rthlr.} \end{array}$$

---

1 ℔. kostet 20 gr. was kosten 489 ℔.?

$$\begin{array}{l} 20 \text{ gr.} = \frac{5}{6} \text{ rthlr.} \\ \quad \text{oder} = (1 - \frac{1}{6}) \text{rthlr.} \\ \quad \text{oder} = \frac{1}{2} \text{ rthlr.} + \frac{1}{3} \text{ rthlr.} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \quad 489 \text{ rthlr.} \\ 6) \overline{\quad\quad\quad\quad\quad} \\ \quad 81 \text{ rthlr. } 12 \text{ gr.} = \frac{1}{6} \cdot 489 \text{ rthlr.} \\ \overline{\quad\quad\quad\quad\quad} (5 \\ \text{Facit: } 407 \text{ rthlr. } 12 \text{ gr.} = \frac{5}{6} \cdot 489 \text{ rthlr.} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \quad 489 \text{ rthlr.} \\ 6) \overline{\quad\quad\quad\quad\quad} \\ \quad 81 \text{ rthlr. } 12 \text{ gr.} = \frac{1}{6} \cdot 489 \text{ rthlr.} \\ \overline{\quad\quad\quad\quad\quad} \\ \text{Facit: } 407 \text{ rthlr. } 12 \text{ gr.} = (1 - \frac{1}{6}) \cdot \text{ rthlr.} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \quad 489 \text{ rthlr.} \\ 2) \overline{\quad\quad\quad\quad\quad} \\ \quad 244 \text{ rthlr. } 12 \text{ gr.} = \frac{1}{2} \cdot 489 \text{ rthlr.} \\ 3) \; 163 \text{ rthlr. } \text{ , , } = \frac{1}{3} \cdot 489 \text{ rthlr.} \\ \overline{\quad\quad\quad\quad\quad} \\ \text{Facit: } 407 \text{ rthlr. } 12 \text{ gr.} = (\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) \cdot 489 \text{ rthlr.} \end{array}$$

Wie viel kosten 634 ℔., wenn 1 ℔. 21 gr. kostet?

$$\begin{array}{l} \text{Da } 21 \text{ gr.} = \frac{7}{8} \text{ rthlr.} \\ \quad \text{oder} = (1 - \frac{1}{8}) \text{ rthlr.} \\ \quad \text{oder} = \frac{1}{2} \text{ rthlr.} + \frac{1}{2.2} \text{ rthlr.} + \frac{1}{2.4} \text{ rthlr.} \\ \quad \text{oder} = (\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3.8}) \text{rthlr.} \end{array}$$

Dem-

Demnach haben wir 4 verschiedene Arten, dieses Exempel auszurechnen, von denen die 2 ersten und vorzüglich die 2te den Vorzug verdient.

634 rthlr.
8) ——————
79 rthlr. 6 gr. $= \frac{1}{8} . 634$ rthlr.
——————————
Facit: 554 rthlr. 18 gr. $= \frac{7}{8} . 634$ rthlr.

634 rthlr.
8) 79 rthlr. 6 gr. $= \frac{1}{8} . 634$ rthlr.
——————————
Facit: 554 rthlr. 18 gr. $= (1 - \frac{1}{8}) . 634$ rthlr.

634 rthlr.
3) ——————
317 rthlr. $= \frac{1}{2} . 634$ rthlr.
2) 158 rthlr. 12 gr. $= \frac{1}{2} . 317$ rthlr.
2) 79 rthlr. 6 $= \frac{1}{2} . 158$ rthlr. 12 gr.
——————————
Facit: 554 rthlr. 18 gr. $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2.2} + \frac{1}{2.4}) . 634$ rthl.

634 rthlr.
2) ——————
317 rthlr. $= \frac{1}{2} . 634$ rthlr.
3) 211 rthlr. 8 gr. $= \frac{1}{3} . 634$ rthlr.
8) 26 rthlr. 10 gr. $= \frac{1}{8} . 211$ rthlr. 8 gr.
——————————
Facit: 554 rthlr. 18 gr. $= (\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3.8}) . 634$ rthl.

Wie viel kosten 349 ℔. wenn das ℔. 22 gr. kostet?

22 gr. $= 1$ rthlr. $- \frac{1}{12}$ rthlr.
oder $= \frac{5}{6}$ rthlr. $+ \frac{1}{2.6}$ rthlr.
oder $= (\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3.4})$ rthlr.

349 rthlr.
12) 29 rthlr. 2 gr. $= \frac{1}{12} . 349$ rthlr.
——————————
Facit: 319 rthlr. 22 gr. $= (1 - \frac{1}{12}) . 349$ rthlr.

349 rthlr.

6) ——————

58 rthlr. 4 gr. $= \frac{1}{6} \cdot$ 349 rthlr.

—————— 5)

290 rthlr. 20 gr. $= \frac{5}{6} \cdot$ 349 rthlr.

29 rthlr. 2 gr. $= \frac{1}{2} \cdot$ 58 rthlr. 4 gr.

Facit: 319 rthlr. 22 gr. $= (\frac{5}{6} + \frac{1}{2.6})$ rthlr. 349 rthlr.

349 rthlr.

2) ——————

174 rthlr. 12 gr. $= \frac{1}{2} \cdot$ 349 rthlr.

3) 116 rthlr. 8 gr. $= \frac{1}{3} \cdot$ 349 rthlr.

4) 29 rthlr. 22 gr. $= \frac{1}{4} \cdot$ 116 rthlr. 8 gr.

Facit: 319 rthlr. 22 gr. $= (\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3.4}) \cdot$ 349 rthlr.

Die erste Art verdient den Vorzug.

---

1 Schock kostet 23 gr. was kosten 281 Schock?

23 gr. $=$ 1 rthlr. $- \frac{1}{24}$ rthlr.

oder $= \frac{5}{6}$ rthlr. $+ \frac{1}{8}$ rthlr.

oder $= \frac{1}{2}$ rthlr. $+ \frac{1}{3}$ rthlr. $+ \frac{1}{2.4}$ rthlr.

281 rthlr.

24) 11 rthlr. 17 gr. $= \frac{1}{24} \cdot$ 281 rthlr.

Facit: 269 rthlr. 7 gr. $= (1 - \frac{1}{24}) \cdot$ 281 rthlr.

281 rthlr.

—————— (5

1405 rthlr. $= 5 \cdot$ 281 rthlr.

6) ——————

234 rthlr. 4 gr. $= \frac{1}{6} \cdot$ 1405 rthlr.

35 rthlr. 3 gr. $= \frac{1}{8} \cdot$ 281 rthlr.

Facit: 269 rthlr. 7 gr.

281 rthlr.

2) ——————

140 rthlr. 12 gr. $= \frac{1}{2} \cdot$ 281 rthlr.

3) 93 rthlr. 16 gr. $= \frac{1}{3} \cdot$ 281 rthlr.

4) 35 rthlr. 3 gr. $= \frac{1}{4} \cdot$ 140 rthlr. 12 gr.

Facit: 269 rthlr. 7 gr. $= (\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2.4}) \cdot$ 281 rthlr.

Am

Am kürzesten ist offenbar die erste Art, nur muß man schnell mit 24 zu dividiren wissen.

---

1 Stück kostet 1 pf., wie viel kosten demnach 570 Stück?

Da . . 1 pf. = $\frac{1}{4.6.12}$ rthlr ist, so ist die Rechnung folgende:

570 rthlr.
4)————————
142 rthlr 12 gr. = $\frac{1}{4}$. 570 rthlr.
6)————————
23 rthlr 18 gr. = $\frac{1}{6}$. 142 rthlr. 12 gr.
21)————————
Facit: 1 rthlr. 23 gr. 6 pf. = $\frac{1}{12}$. 23 rthlr. 18 gr.

Wer mit 24 zu dividiren weiß, rechnet auch kürzer so:

570 rthlr,
24)————————
23 rthlr. 18 gr. = $\frac{1}{24}$. 570 rthlr.
12)————————
Facit: 1 rthlr. 23 gr. 6 pf. $\frac{1}{12.24}$. 570 rthlr.

---

1 Loth kostet 2 pf. wie viel kosten 432 Loth?

Es sind . . 2 pf. = $\frac{1}{12.12}$ rthlr.

Demnach stehet die Rechnung so:

432 rthlr.
Dividirt mit 12)————————
33 rthlr.
Dividirt mit 12)————————
Facit: . . 3 rthlr.

---

1 Loth kostet 3 pf. was kosten 234 Loth?

3 pf. sind = $\frac{1}{8.12}$ rthlr.

234 rthlr.
8)————————
29 rthlr. 6 gr.
12)————————
Facit: . 2 rthlr. 10 gr. 6 pf.

1 Loth

1 Loth kostet 4 pf., was kosten 345 Loth?

$4\ pf. = {}_{6}.\frac{1}{12}\ rthlr. = {}_{8}.\frac{1}{9}.$

335 rthlr.	345 rthlr.
6) ———	8) ———
57 rthlr. 12 gr.	43 rthlr. 3 gr.
12) ———	9) ———
Facit: 4 rthlr. 19 gr.	4 rthlr. 19 gr.

Die erste Art verdient den Vorzug, weil, wenn bey der Division mit 9 etwas übrig bleibt, (wie hier bleiben 7,) die Reduction weit schwieriger ist, als bey der Division mit 12, denn der 2te Theil eines Thalers beträgt gerade 2 Groschen, und der 9te Theil beträgt 2 gr. 8 pf.

Wenn ich daher sage, 12 in 57 habe ich 4mal und bleiben 7 Rest, das heißt $\frac{7}{12}$ rthlr. = 7. 2 gr. = 14 gr. so ist dieses weit leichter, als wenn ich sage, 9 in 43 habe ich 4, bleiben 7, das heißt $\frac{7}{9}$ rthlr. = 7. (2 gr. 8 pf.) = 18 gr. 8 pf. Endlich wenn ich eine Anzahl Groschen durch 12 theile, so giebt der etwa übrig bleibende Rest, sogleich die Pfennige, aber nicht so bey 9.

---

1 Elle Band kostet 5 pf., wie viel kosten 456 Ellen?

$5\ pf. = {}_{6}.\frac{1}{12}\ rthlr. + {}_{4}.\frac{1}{72}\ rthlr.$

$oder = {}_{6}.\frac{1}{8}\ rthlr. - {}_{6}.\frac{1}{48}\ rthlr.$

456 rthlr.
6) ———
76 rthlr.
12) ———
6 rthlr. 8 gr.
4) 1 rthlr. 14 gr.
———

Facit: 7 rthlr. 22 gr. $= ({}_{6}.\frac{1}{12} + {}_{4}.\frac{1}{72}).$ 456 rthlr.

8) 456 rthlr.

6) 57 rthlr.

9 rthlr. 12 gr.

6) 1 rthlr. 14 gr.

Facit: 7 rthlr. 22 gr. $= (\frac{1}{6.8} - \frac{1}{6.48})$. 456 rthlr.

---

1 Elle kostet 6 pf., was kosten 567 Ellen?

6 pf. $= \frac{1}{6.8}$ rthlr.

6) 567 rthlr.

8) 94 rthlr. 12 gr.

Facit: 11 rthlr. 19 gr. 6 pf.

---

1 Loth kostet 7 pf., was kosten 578 Loth?

7 pf. $= \frac{1}{6.8}$ rthlr. $+ \frac{1}{6.48}$ rthlr.
oder $= \frac{1}{12} (\frac{1}{8} + \frac{1}{6})$ rthlr.

Demnach stehet nach beyden Arten die Rechnung, wie folget:

6) 578 rthlr.

8) 96 rthlr. 8 gr.

12 rthlr. 1 gr.

6.) 2 rthlr – gr. 2 pf.

Facit: 14 rthlr. 1 gr. 2 pf. $= (\frac{1}{6.8} + \frac{1}{6.48})$. 578 rthlr.

6) 578 rthlr.

96 rthlr. 8 gr.

8) 72 rthlr. 6 gr.

168 rthlr. 14 gr.

12) Facit: 14 rthlr. 1 gr. 2 pf. $= \frac{1}{12} (\frac{1}{6} + \frac{1}{8})$. 578 rthlr.

Bey der ersten Art sind die Divisionen, 6, 8, 6; bey der zweyten Art, 6, 8, 12; alsoist die erstere Art, wenn man will, besser.

---

1 Loth kostet 8 pf., was kosten 789 Loth?

8 pf. = $\frac{1}{3.12}$ rthlr. oder = $\frac{1}{4.9}$ rthlr.; oder = $\frac{1}{6.6}$ rthlr.

789 rthl.	789 rthl.	789 rthl.
3) ————	4) ————	6) ————
263 rthl.	197 rthl. 6 gr.	131 rthl. 12 gr.
12) ————	9) ————	6) ————
Facit: 21 rthl. 22 gr.	21 rthl. 22 gr.	21 rthl. 22 gr.

Die erste Art verdient den Vorzug, dann kömmt die zweyte, und dann erst die 3te Art.

---

1 Loth kostet 9 pf., was kosten 890 Loth?

9 pf. = $\frac{1}{4.8}$ rthlr.

490 rthlr.
4) ————
222 rthlr. 12 gr.
8) ————
Facit: 27 rthlr. 19 gr. 6 pf.

---

1 Loth kostet 10 pf., was kosten 901 Loth?

10 pf. = $\frac{1}{12}$ $(\frac{1}{4} + \frac{1}{6})$ rthlr.; oder = $\frac{1}{24}$ $(1 - \frac{1}{6})$ rthlr.

901 rthlr.
4) ————
225 rthlr. 6 gr.
6) 150 rthlr. 4 gr.
————
375 rthlr. 10 gr.
12) ————
Facit: 31 rthlr. 6 gr. 10 pf.

901 rthlr.
6) 150 rthlr. 4 gr.
————
$(1 - \frac{1}{6})$. 901 rthlr. = 759 rthlr. 20 gr.
24) ————
$\frac{1}{24}(1 - \frac{1}{6})$. 901 rthl. = 31 rthlr. 6 gr. 10 pf.

1 Loth

1 Loth kostet 11 pf., was kosten 1023 Loth?

11 pf. $= \frac{1}{12}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4.6}\right)$ rthlr.

oder $= \frac{1}{12}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2.4} + \frac{1}{3.4}\right)$ rthlr.

oder $= \frac{1}{24}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2.2} + \frac{1}{3.4}\right)$ rthlr.

oder $= \frac{1}{24}\left(1 - \frac{1}{12}\right)$ rthlr.

1023 rthlr.

4) 255 rthlr. 18 gr. $= \frac{1}{4} \cdot$ 1023 rthlr.

6) 170 rthlr. 12 gr. $= \frac{1}{6} \cdot$ 1023 rthlr.

4) 42 rthlr. 15 gr. $= \frac{1}{4} \cdot$ 170 rthlr.

468 rthlr. 21 gr. $= \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4.6}\right) \cdot$ 1023 rthlr.

12) Facit: 39 rthlr. 1 gr. 9 pf. $= \frac{1}{12} \cdot$ 468 rthlr. 21 gr.

1023 rthlr.

4) 255 rthlr. 18 gr. $= \frac{1}{4} \cdot$ 1023 rthlr.

2) 127 rthlr. 21 gr. $= \frac{1}{2} \cdot$ 255 rthlr. 18 gr.

3) 85 rthlr. 6 gr. $= \frac{1}{3} \cdot$ 255 rthlr. 18 gr.

468 rthlr. 21 gr. $= \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4}\right) \cdot$ 1023 thl.

12) Facit: 39 rthlr. 1 gr. 9 pf. $= \frac{1}{12} \cdot$ 468 rthlr. 21 gr.

1023 rthlr.

2) 511 rthlr. 12 gr. $= \frac{1}{2} \cdot$ 1023 rthlr.

2) 255 rthlr. 18 gr. $= \frac{1}{2} \cdot$ 511 rthlr.

3) 170 rthlr. 12 gr. $= \frac{1}{3} \cdot$ 511 rthlr.

937 rthlr. 18 gr. $= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2.2} + \frac{1}{2.3}\right) \cdot$ 1023 thlr

24) Facit: 39 rthlr. 1 gr. 9 pf. $= \frac{1}{24} \cdot$ 937 rthlr. 18 gr.

1023 rthlr.

12) 85 rthlr. 6 gr. $= \frac{1}{12} \cdot$ 1023 rthlr.

937 rthlr. 18 gr.

24) Facit: 39 rthlr. 1 gr. 9 pf.

Diese letzte Art ist ohnstreitig die kürzeste.

§. 112.

Diese Beyspiele zeigen hinlänglich, daß die Kürze der Rechnung hauptsächlich von der geschickten Reduction der Groschen oder Pfennige auf höhere Einheiten abhängt. Die vorhergehenden Exempel geben den Anfängern dazu eine gute Anleitung, und es ist jedem anzurathen, sich hierinn eine Fertigkeit zu erwerben. Ich will daher noch einige Exempel zur Uebung hersetzen.

1 ℔ kostet 2 gr. 8 pf., wie viel kosten 785 ℔?

2 gr. + 8 pf. = $\frac{1}{12}$ rthlr. + $\frac{1}{3.12}$ rthlr. = $\frac{3}{3.12}$ rthlr. + $\frac{1}{3.12}$ rthlr. = $\frac{4}{3.12}$ rthlr. = $\frac{1}{3.3}$ rthlr. = $\frac{1}{9}$ rthlr.

789 rthlr.

9) ——————————

Facit: 87 rthlr. 5 gr. 4 pf.

Wer sehr viel Exempel zu rechnen hat, wo der Preis des Stücks 2 gr. 8 pf. beträgt, dem rathe ich, sich folgender Tafel zu bedienen.

$\frac{1}{9}$ rthlr.	=	2 gr.	8 pf.
$\frac{2}{9}$ -	=	5 -	4 -
$\frac{3}{9}$ -	=	8 -	, -
$\frac{4}{9}$ -	=	10 -	8 -
$\frac{5}{9}$ -	=	13 -	4 -
$\frac{6}{9}$ -	=	16 -	, -
$\frac{7}{9}$ -	=	18 -	8 -
$\frac{8}{9}$ -	=	21 -	4 -

Ich theile hier zugleich eine Tafel für $\frac{1}{18}$ rthlr. mit.

$\frac{1}{18}$ rthlr.	=	1 gr.	4 pf.	$\frac{10}{18}$ rthlr.	=	13 gr.	4 pf.
2 -	=	2 -	8 -	11 -	=	14 -	8 -
3 -	=	4 -	, -	12 -	=	16 -	, -
4 -	=	5 -	4 -	13 -	=	17 -	4 -
5 -	=	6 -	8 -	14 -	=	18 -	8 -
6 -	=	8 -	, -	15 -	=	20 -	, -
7 -	=	9 -	4 -	16 -	=	21 -	4 -
8 -	=	10 -	8 -	17 -	=	22 -	8 -
9 -	=	12 -	, -				

1 Stück

1 Stück kostet 1 gr. 4 pf., wie viel kosten 851 Stück?

1 gr. + 4 pf. = $\frac{1}{24}$ rthlr. + $\frac{1}{3.24}$ rthlr. = $\frac{3}{3.24}$ rthlr. + $\frac{1}{3.24}$ rthlr. = $\frac{4}{3.24}$ rthlr. = $\frac{1}{3.8}$ rthlr. = $\frac{1}{18}$ rthlr.

Diese Reduction kann kürzer so geschehen.

2 (1 gr. + 4 pf.) = $\frac{1}{9}$ rthlr.; folgt 1 gr. + 4 pf. = $\frac{1}{18}$ rthlr.

$$18)\ \overline{851 \text{ rthlr.}}$$

Facit: 47 rthlr. 6 gr. 8 pf.

Es bleiben nemlich hier 5 übrig, diese in der Tabelle aufgesucht, geben 6 gr. 8 pf.

Wer aber nicht mit 18 auf einmal gut dividiren kann, der kann sich 18 in 3 : 6 oder 2 : 9 zerfällen.

---

1 Stück kostet 1 gr. 6 pf., wie viel kosten 1753 Stück?

1 gr. + 6 pf. = $\frac{1}{24}$ rthlr. + $\frac{1}{2.24}$ rthlr. = $\frac{2}{2.24}$ rthlr. + $\frac{1}{2.24}$ rthlr. = $\frac{3}{2.24}$ rthlr. = $\frac{1}{2.8}$ rthlr. = $\frac{1}{16}$ rthlr.

$$16)\ \overline{1753 \text{ rthlr.}}$$

Facit: 109 rthlr. 13 gr. 6 pf.

Hier kann es wiederum vortheilhaft seyn, folgende Tafel zu haben.

$\frac{1}{16}$ rthlr.	=	1 gr.	6 pf.		$\frac{9}{18}$ rthlr	=	13 gr.	6 pf.
2 -	=	3 -	ʼ -		10 -	=	15 -	ʼ -
3 -	=	4 -	6 -		11 -	=	16 -	6 -
4 -	=	6 -	ʼ -		12 -	=	18 -	ʼ -
5 -	=	7 -	6 -		13 -	=	19 -	6 -
6 -	=	9 -	ʼ -		14 -	=	21 -	ʼ -
7 -	=	10 -	6 -		15 -	=	22 -	6 -
8 -	=	12 -	ʼ -					

Wer nicht schnell auf einmal mit 16 dividiren kann, zerfälle sich solche in 4. 4 oder in 2. 8.

Was

Was kosten 56 Lasten, wenn 1 Scheffel 1 rthlr. 10 gr. kostet? Die Last Getraide in Berlin, hält 3 Wispel, und der Wispel 24 Scheffel.

Da 1 rthlr. + 10 gr. = 34 gr. = 2. 17 gr.; so hat man hier 2 . 17 rthlr. = 56. 6. 17 rthlr.

also 56
392 (17
952 (6
Facit: 5712 rthlr.

Nemlich 56 Lasten geben 3. 56 Wispel = 24. 3. 56 Scheffel, diese kosten 24. 3. 56. 2. 17 gr. = $\frac{24.3.56.2.17}{24}$ rthlr.

Da der Wispel eben so viel Scheffel, als der Thaler Groschen enthält, so erhalten wir dadurch folgende Vortheile.

Wenn der Preis eines Scheffels gegeben ist, und man den Preis einer Anzahl von Wispeln finden soll, so hat man nur nöthig, die Zahl der Wispel mit der Zahl der Groschen zu multipliciren, und zu dem Produkte die Benennung Thaler zu setzen; soll aber der Preis mehrerer Lasten gefunden werden, so multipliciret man die Anzahl der Lasten erst mit der gedachten Anzahl der Groschen, und dies Produkt denn noch mit 3.

Nach dieser Regel hätte ich 56 mit 34, und das daher entstehende Produkt nochmal mit 3 multipliciren sollen, da aber 34. 3 = 17. 6 ist, so habe ich diese letzten Faktoren gewählt, weil mit ihnen am kürzesten zu rechnen ist.

Ein ähnlicher Vortheil findet bey der Rechnung mit Schocken statt. Es ist nemlich der Preis eines Schocks immer so vielmal 5 gr., als ein Stück Pfennige, und so vielmal $2\frac{1}{2} = \frac{10}{4}$ rthlr., als ein Stück Groschen kostet. Denn wenn 1 Stück 1 Pfennig kostet, so kostet 1 Schock 60 Pfennige = 5 gr., und kostet ein Stück 1 gr. so kostet ein Schock 60 gr. = $2\frac{1}{2}$ rthlr. = $\frac{10}{4}$ rthlr.

Was

Was kosten 108 Schock à 3 Pf. 1 Stück?

Das Schock kostet also 3 . 5 gr. = 15 gr. = $\frac{5}{8}$ rthlr.
Demnach . . 108 rthlr.

$$\begin{array}{r} 108 \text{ rthlr.} \\ \hline 540 \text{ rthlr.} \\ 8)\overline{\phantom{540 \text{ rthlr.}}} \\ 67 \text{ rthlr. } 12 \text{ gr.} \end{array} (5$$

Was kosten 316 Schock à 1 gr. das Stück?

Das Schock kostet also $\frac{10}{4}$ rthlr.
Mithin kosten 316 Schock, $\frac{316.10}{4}$ rthlr = $4\frac{316}{790}$ rthlr.

Was kosten 112 Schock à 1 gr. 3 Pf. das Stück?

Das Schock kostet also $\frac{10}{4}$ rthlr. + $\frac{5}{8}$ rthlr. = $(\frac{20}{8} + \frac{5}{8})$ rthlr. = $\frac{25}{8}$ rthlr = $\frac{100}{4.8}$ rthlr. Demnach stehet die Rechnung so: 112 . .

$$\begin{array}{r} 112 \\ 4)\overline{} \\ 2800 \\ 8)\overline{} \\ 350 \text{ rthlr.} \end{array}$$

Dieses Exempel stehet, so wie auch die 3 vorhergehenden, in des berühmten Herrn Professor Michelsen: Versuche in Socratischen Gesprächen über die wichtigsten Gegenstände der Arithmetik.*) Zweyter Band. Seite 236. Hr. Michelsen rechnet seinem Zwecke gemäß diese Exempel nicht so kurz als ich, in der Rechnung des letztern Exempels ist bey Hr. Michelsen ein Rechnungsfehler, statt $37\frac{1}{3}$ sollte 14, und statt $373\frac{1}{3}$, sollte 350 stehen.

Was

*) Von diesen Socratischen Gesprächen der Arithmetik sind 3 Bände erschienen in Berlin bey Fr. Maurer. Der erste Band ist von 1784. der 2te von 1785. der 3te von 1786. Der erste Band ist aber nur im Gesprächen geschrieben. Der gelehrte Verfaßer verlies diesen Weg um in den folgenden Bänden mehr Materien zu berühren, als bey der Beybehaltung der Gesprächen möglich gewesen wäre. Daher ist der 2te und 3te Band auch unter folgenden Titel zu haben: Anleitung zur praktischen Rechenkunst.

Was kosten 7 Centner 80 ℔. wenn 100 ℔. 16 Rthlr. 21 gr. kosten? Der Cent. zu 110 ℔. gerechnet.

21 gr. = $\frac{1}{2}$ rthlr. + $\frac{1}{2.2}$ rthlr. + $\frac{1}{2.4}$ rthlr.; Daher stehet die Rechnung wie folget.

7 Ct. 80 ℔. — 0,43 rthlr.

850 ℔. — 10,32 gr. (24

5100 (16

2) 425 — 0,32 gr.

2) 212 – 12 gr. — 0,18 gr.

2) 106 – 6 gr. — 0,50 gr. = 6 pf.

143,43 rthlr. 18 gr.

100

Also das Resultat = 143 rthlr. 10 gr. 6 pf.

So stehet diese Aufgabe mit einigen Rechnungsfehlern in Herrn Michelsens obengenannten Buch. Seite 230.

Ich würde hier weit kürzer so rechnen: Die 7 Ct. 80 ℔. sind = 850 ℔., diese sogleich mit 100 ℔. dividirt geben 8, 5 = 8$\frac{1}{2}$.

16 rthlr. 21 gr. (8

135 rthlr. . . = $\frac{1}{8}$(16 rthlr. + 21 gr.)

2) 8 rthlr. 10 gr. 6 pf. = $\frac{1}{2}$(16 trhlr. 21 gr.)

§. 113.

Bey der Berlinischen Banque machen 100 Bc. ℔. den Werth von 125 Rthlr. in Frd'or, oder von 131$\frac{1}{4}$ Rthlr. in Courant. Um nun Bc. ℔. in Frd'or oder Courant und umgekehrt zu verwandeln, sind folgende Regeln richtig und bequem zur Anwendung.

1. Bc. ℔. in Rthlr. in Golde zu verwandeln, darf man nur die Summe der Bc. ℔. um ihren vierten Theil vergrössern.

2. Bc. ℔. in Courant zu verwandeln, hat man nur nöthig die Summe der Bc. ℔. um ihren vierten und um den vierten Theil des vierten Theils zu vergrößern.

3. Rthlr.

3. Rthlr in Golde in Bc. ℔. zu verwandeln, darf man nur von der Summe der Rthlr. ihren fünften Theil abziehen.

4. Courant in Bc. ℔. zu verwandeln, sucht man von ihrer Summe $\frac{1}{3}$, von diesem drittel $\frac{1}{7}$, addirt beyde und multiplicirt die gefundene Summe mit 2.

Exempel mögen diese Regeln erläutern.

Wie viel betragen 7354 Bc. ℔. in Frd'or?

Stehet nach der ersten Regel so:

	7354 Rthlr.	
4)	1838 Rthlr.	12 gr.
Facit:	9192 Rthlr.	12 gr.

Der Grund ist dieser, da 100 Bc. ℔. = 125 Rthlr. in Golde so ist 1 Bc. ℔. = 1, 25 = $1\frac{1}{4}$ Rthlr. folglich betragen 7354 Bc. ℔.; 7354 . $1\frac{1}{4}$ Rthlr. im Golde.

Wie viel betragen 1321 Bc. ℔. im Courant?

Nach der zweyten Regel stehet die Rechnung hier so:

	1321 Rthlr.			
4)	330 Rthlr.	6 gr.		
4)	82 Rthlr.	13 gr.	6 pf.	
Facit:	1733 Rthlr.	19 gr.	6 pf.	

Beweis der Regel. 100 Bc. ℔. = $131\frac{1}{4}$ Rthlr. Courant. Daher 1 Bc. ℔. = 1, $31\frac{1}{4}$ = 1, $\frac{125}{4}$ = $1 + \frac{1}{4} \cdot 1,25 = 1 + \frac{1}{4} \cdot 1\frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4 \cdot 4}$, und folglich machen 13 ℔. Bc. $(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4 \cdot 4}) \cdot 1321$ Rthlr. Courant aus.

Wie

Wie viel Bc. ℔. erhält man für 2048 rthlr. in Frd'or.?

Nach No. 3 stehet die Rechnung so:

```
    2048
5)   409⅗
=============
   1638⅖ Bc. ℔.
```

Dieses Exempel stehet im Herrn Professor Michelsens Arithmetik 2ter Theil Seite 271, es sind dort Rechnungsfehler.

Beweis der Regel. Da 110 Bc. ℔. = 125 Rthlr. Gold, so ist $\frac{100}{125} = \frac{4}{5} = (1 - \frac{1}{5})$ Bc. ℔. = 1 Rthlr. Gold daher 2048 Rthlr. in Gold = $(1 - \frac{1}{5})$ Bc. ℔. . 2048 sind.

Wie viel Bc. ℔. erhält man für 967 Rthlr. 7 gr. 9 pf. in Courant?

Nach der 4ten Regel stehet die Rechnung so:

```
      967 Rthlr. 7 gr. 6 pf.
3:) ==========================
      322  "  "  10  "  6  "
7)     46  "  "   1  "  6  "
    ==========================
      368 Rthlr. 12 gr.
    ========================== (2
Facit: 737 Bc. ℔.
```

Beweis der 4ten Regel. Da 100 Bc. ℔. = $131\frac{1}{4}$ Rthlr. Courant, oder 100 = $\frac{525}{4}$, = so sind $\frac{400}{525}$ Bc. ℔. = 1 Rthlr. Courant; aber $\frac{400}{525} = \frac{4}{5{,}25} = \frac{4}{5\frac{1}{4}} = \frac{4}{\frac{21}{4}} = \frac{16}{21} = \frac{14}{21} + \frac{2}{21} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3 \cdot 7}$ 2 $= (\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 7})$; daher betragen 967 Rthlr. 7 gr. 6 pf. Courant, $2(\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 7})$ (967 Rthlr. 7 gr. 6 pf.) Bc. ℔.

Man bezeichne durch B, G, C, Bc. ℔., Gold und Courant, so lassen sich obige 4 Regeln durch folgende Formeln bequem darstellen.

1) G

1) $G = (1 + \frac{1}{4}) . B$

2) $C = (1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2.4}) . B$

3) $B = (1 - \frac{1}{5}) . G;$

4) $B = 2 (\frac{1}{3} + \frac{1}{3.7}) . C.$

Der Mathematiker rechnet lieber nach solchen Formeln, als nach Regeln in Worten ausgedrückt, weil er jene weit eher übersehen kann, und ein jeder wird solchen Formeln den Vorzug einräumen, sobald er nur die lakonische Sprache der Mathematiker verstehet.

§. 114.

Da 14 Thlr. Hannöverisch Cassengeld = 15 Thlr. Gold sind, so ist 1 Thlr Hannöverisch Cassengeld = $\frac{15}{14}$ = $(1 + \frac{1}{14})$ Thlr. Gold; und eben so 1 Thlr. Gold = $\frac{14}{15} = (1 - \frac{1}{15})$ Thlr. Hannöverisch Cassengeld. Es bedeute hier wieder G, Gold und H, Hannöverisch Cassengeld, so ist allgemein.

1) $G = (1 + \frac{1}{14}) . H$; 2) $H = (1 - \frac{1}{15}) . G$

Wie viel betragen 3572 Thlr. Cassengeld, in Golde?

Nach No. 1 ist die Rechnung so:

$$\begin{array}{rl} & 3572. \\ 14) & 255\frac{1}{7} \\ \hline \end{array}$$

Facit: 3927 Thlr. Gold. = 3827 Thlr. 5 Mgr. $1\frac{1}{7}$ pf.

Denn: $\frac{1}{7}$ Thlr. = $\frac{36}{7}$ Mariengroschen = $5\frac{1}{7}$ Mgr.; $\frac{1}{7}$ Mgr. = $\frac{8}{7}$ pf. = $1\frac{1}{7}$ pf.

Ich habe diese Aufgabe aus Herrn Hofrath Kästners Fortsetzung der Rechenkunst in Anwendung auf man,

mancherley Geschäfte Seite 108 entlehnt.*) Mittelst der Logarithmen findet dieser große Mathematiker 3827 Thlr. 5 Mgr. 0, 32 pf. Gold, fehlt also noch nicht um einen ganzen Pfennig. Allein obgleich hierdurch die Sicherheit des Gebrauchs der Logarithmen erhellet, so würde, ich hier doch nie Logarithmen brauchen, indem ein jeder nach der von mir gezeigten Art weit schneller und auch bequemer rechnet, als selbst auch derjenige rechnen würde, der mit Kästnerischen Scharfsinn die Logarithmen anzuwenden weiß. Wer nach meiner Vorschrift nicht auf einmal mit 14 oder 15 zu dividiren weiß, rechnet auch noch immer kurz, wenn er mit 2 . 7 oder 3 . 5 das heißt, mit jedem Faktor dividirt; indessen wer dergleichen Rechnungen viel und oft zu machen hat, erwirbt sich leicht die Fertigkeit mit 14 und 15 zu dividiren. Ich kann dieses aus eigener Erfahrung versichern, da ich im Jahr 1790 für einen meiner Verwandten dergleichen Rechnungen in großer Anzahl zu machen hatte. Dieses war mit eine Veranlassung zu manchen Erfindungen, indem ich gezwungen war, auf Abkürzungen der Rechnungen zu denken, mit denen ich mich damals beschäftigen mußte, dadurch erhielt ich auch eine ungemeine Fertigkeit im schnellen Rechnen, selbst mit ziemlich großen Zahlen.

Um doch hier etwas von meinen Erfindungen mitzutheilen, so will für No. 1 und 2 eine Tafel construiren, wodurch G und H ohne Rechnung gefunden wird.

Tabelle

*) Diese Fortsetzung der Rechenkunst erschien 1786, und soll als die zweyte Abtheilung des ersten Theils der vortreflichen Anfangsgründe der Mathematik eben dieses verehrungswürdigen Greises angesehen werden. Sie ist ein wahrer Prüfestein, zu wissen ob Jemand die Arithmetik wissenschaftlich studirt habe.

Tabelle, zur Verwandelung des Hannöverischen Cassengelds in Gold.

Groschen.	Pfennige.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
0	0	0	14	28	42	56	70	84	98	112	126	140	154	168	182	196	210	224	238
2	$4\frac{4}{7}$	1	15	29	43	57	71	85	99	113	127	141	155	169	183	197	211	225	239
5	$1\frac{1}{7}$	2	16	30	44	58	72	86	100	114	128	142	156	170	184	198	212	226	240
7	$5\frac{5}{7}$	3	17	31	45	59	73	87	101	115	129	143	157	171	185	199	213	227	241
10	$2\frac{2}{7}$	4	18	32	46	60	74	88	102	116	130	144	158	172	186	200	214	228	242
12	$6\frac{6}{7}$	5	19	33	47	61	75	89	103	117	131	145	159	173	187	201	215	229	243
15	$3\frac{3}{7}$	6	20	34	48	62	76	90	104	118	132	146	160	174	188	202	216	230	244
18	-	7	21	35	49	63	77	91	105	119	133	147	161	175	189	203	217	231	245
20	$4\frac{4}{7}$	8	22	36	50	64	78	92	106	120	134	148	162	176	190	204	218	232	246
23	$1\frac{1}{7}$	9	23	37	51	65	79	93	107	121	135	149	163	177	191	205	219	233	247
25	$5\frac{5}{7}$	10	24	38	52	66	80	94	108	122	136	150	164	178	192	206	220	234	248
28	$2\frac{2}{7}$	11	25	39	53	67	81	95	109	123	137	151	165	179	193	207	221	235	249
30	$6\frac{6}{7}$	12	26	40	54	68	82	96	110	124	138	152	166	180	194	208	222	236	250
33	$3\frac{3}{7}$	13	27	41	55	69	83	97	111	125	139	153	167	181	195	209	223	237	251

Tabelle, zur Verwandelung des Goldes in Hannöverisch Cassengeld.

Groschen.	Pfennige.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
0	0	0	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150	165	180	195	210	225	240	255
2	$3\frac{1}{5}$	1	16	31	46	61	76	91	106	121	136	151	166	181	196	211	226	241	256
4	$6\frac{2}{5}$	2	17	32	47	62	77	92	107	122	137	152	167	182	197	212	227	242	257
7	$1\frac{3}{5}$	3	18	33	48	63	78	93	108	123	138	153	168	183	198	213	228	243	258
9	$4\frac{4}{5}$	4	19	34	49	64	79	94	109	124	139	154	169	184	199	214	229	244	259
12	–	5	20	35	50	65	80	95	110	125	140	155	170	185	200	215	230	245	260
14	$3\frac{1}{5}$	6	21	36	51	66	81	96	111	126	141	156	171	186	201	216	231	246	261
16	$4\frac{4}{5}$	7	22	37	52	67	82	97	112	127	142	157	172	187	202	217	232	247	262
19	$1\frac{3}{5}$	8	23	38	53	68	83	98	113	128	143	158	173	188	203	218	233	248	263
21	$4\frac{4}{5}$	9	24	39	54	69	84	99	114	129	144	159	174	189	204	219	234	249	264
24	–	10	25	40	55	70	85	100	115	130	145	160	175	190	205	220	235	250	265
26	$3\frac{1}{5}$	11	26	41	56	71	86	101	116	131	146	161	176	191	206	221	236	251	266
28	$6\frac{2}{5}$	12	27	42	57	72	87	102	117	132	147	162	177	192	207	222	237	252	267
31	$1\frac{3}{5}$	13	28	43	58	73	88	103	118	133	148	163	178	193	208	223	238	253	268
33	$4\frac{4}{5}$	14	29	44	59	74	89	104	119	134	149	164	179	194	209	224	239	254	269

§. 115.

Der Platz erlaubt hier nicht diesen Tabellen eine größere Ausdehnung zu geben, ein jeder wird überdem bey einer geringen Aufmerksamkeit von selbst einsehen, daß er solche beliebig erweitern kann. Jetzt will ich den Gebrauch davon zeigen.

Diese Tafeln enthalten weit mehr, als der erste Anblick versprechen mag, sie sind zugleich auch allgemeine Multiplikations- und Divisions-Tafeln, die erste für die Zahl 14, die andere für 15. Soll ich z. B. $\frac{7359}{103026}$ mit 14 multipliciren, so suche ich nach und nach die Ziffern des Multiplicandus, so wie sie von der Rechten zur Linken auf einander folgen, in der obersten Horizontalreihe auf. Ich suche also zuerst 9 auf, unter dieser 9 stehet 126; von dieser Zahl schreibe ich die Einer unter der 9; die Zehner (12), suche ich in der ersten Vertikalreihe linker Hand, neben der Groschen und Pfennige Columne, und die zweyte Ziffer des Multiplicandus (5) suche ich wieder in der obersten Horizontalreihe, der Vertikal- und Horizontaldurchschnitt dieser beyden Zahlen, giebt die Zahl 82, von dieser schreibe ich wieder die Einer (2) unter die Ziffer des Multiplicandus (5) und die Zehner (8) suche ich wieder in der ersten Verticalreihe, so wie die Ziffer des Multiplicandus (3), in der obersten Horizontalreihe auf, und finde wieder 50, die Null schreibe unter 3, die 5 wird wieder in der Vertikal, und 7 in der Horizontalreihe aufgesucht, giebt 103, die ich, da 7 die letzte Ziffer des Multiplicandus war, ganz unter 7 hingeschrieben, und also wäre 14 . 7359 = 103026. Eben so würde man mit 15 mittelst der andern Tabelle multipliciren, ich rathe es nur einigemal zu thun, und man wird sich leicht eine Fertigkeit in dieser mechanischen Operation erwerben.

Soll

Soll ich 103026 mit 14 dividiren, so suche man, da 10 kleiner als der Divisor, 103 in der Tabelle auf, so stehet allemal in der obersten Horizontalreihe der Quotient (7) und in der ersten Vertikalreihe der Rest (5), zu diesem Rest setze ich die nächstfolgende Ziffer des Dividendus (0), und suche nun 50 auf, (nur nie in der obersten Horizontalreihe), so finde ich den Quotienten 3 und den Rest 8. Zu diesem Rest nehme ich wiederum die nun folgende Ziffer des Dividendus (2), und suche nun 82 auf, finde den Quotus 5 und Rest 12, nun suche ich endlich 126 auf und finden den Quotus 9 und den Rest 0. Folglich ist $\frac{103026}{14} = 7359$, wie es seyn muß.

Die Gedult, die ein Anfänger da haben muß, wenn er zum erstenmale nach diesen Tabellen rechnen soll, kömmt in keine Vergleichnng, mit dem Vergnügen, welches er nachher empfinden wird.

§. 116.

Wie viel betragen 235 Rthlr. Cassengeld im Golde?

Man suche 235 in der ersten Tabelle auf, (sie hat zur Ueberschrift: Tabelle zur Verwandelung des Hannöverischen Cassengeld's, in Gold), so findet sich in der obersten Horizontalreihe 16 Rthlr. und in der ersten Vertikalreihe stehet neben den Rest 11, 28 gr. $2\frac{2}{7}$ pf.

Diese 16 rthlr. 28 gr. $2\frac{2}{7}$ pf. addire man zu 235 Rthlr., so erhält man das Gesuchte.

Nemlich: 235 rthlr.
16 rthlr. 28 gr. $2\frac{2}{7}$ pf.

Facit: 251 rthlr 23 gr. $2\frac{2}{7}$ pf. Gold.

Wie

Wie viel betragen 266 Rthlr. Gold, in Cassengeld?

Suche in der Tabelle, welche zur Ueberschrift hat: „Tabelle zur Verwandelung des Goldes in Hannöverisch Cassengeld," die Zahl 266 auf, (nur nie in der obersten Horizontalreihe, welches auch bey dem vorigen Exempel beobachtet werden muß), so findest du in der obersten Horizontalreihe 17 Rthlr., und neben dem Reste 11 in der ersten Vertikalreihe, 26 gr. $3\frac{1}{5}$ pf.

Diese 17 rthlr. 26 gr. $3\frac{1}{5}$ pf., ziehe von 266 rthlr. ab, so hast du das Gesuchte.

Also:	266 rthlr.			
	17 rthlr.	26 gr.	$3\frac{1}{5}$ pf.	
Facit: •	248 rthlr.	9 gr.	$4\frac{4}{5}$ pf.	Cassengeld.

Bey diesen Exempeln haben wir also nur eine simple Addition und Subtraktion nöthig, die nöthige Division mit 14 und 15 ersparen uns unsere Tabellen, und dieses ist, denke ich, eine der wichtigsten Ersparnisse, mehr thun ja hiebey selbst die Logarithmen nicht, deren Aufsuchen weit beschwerlicher ist, und zuletzt müßte man doch noch, wenn das Resultat in Groschen und Pfennigen verlangt wird, den Decimalbruch von den Rthlr. in Groschen und Pfennige verwandeln, dieses letztere erspart uns aber unsere Tabelle auch, zu geschweigen, daß sie uns noch eine Menge anderer Vortheile darbietet, die nie die Logarithmen in diesem Grade gewähren können. Diese Tabellen beantworten auch folgende Fragen:

1 Stück kostet 2 Mgr. $4\frac{4}{7}$ pf., wie viel kosten 159 Stück?

Suche 159 wie vorhin in der ersten Tabelle auf, und du findest: 11 rthlr. 12 Mgr. $6\frac{6}{7}$ pf.

1 Sück kostet 2 Mgr. $3\frac{1}{5}$ pf. wie viel kosten 231 Stück?

Suche wie vorhin 231 in der zweyten Tabelle auf, so erhälst du sogleich 15 Rthlr. 14 Mgr. $3\frac{1}{5}$ Pf.

Wie viel machen 14mal (17 Rthlr. 23 Mgr. $1\frac{1}{7}$ Pf.)?.

Suche in der obersten Horizontalreihe der ersten Tabelle 17 rthlr., in den ersten zwey Vertikalreihen linker Hand aber die 23 Mgr. $1\frac{1}{7}$ pf. auf, so findest du das richtige Resultat in dem Durchschnitt der Horizontal und Vertikalcollumnen: nemlich 247 rthlr.

Wie viel beträgt 15mal (13 Rthlr. 19 Mgr. $1\frac{3}{5}$ Pf.)?

Suche in der zweyten Tabelle wie vorhin, so findet sich das Resultat = 203 rthlr.

§. 117.

Damit man doch einigermaaßen die Menge der Aufgaben übersehen mag, die mittelst dieser Tabellen unmittelbar aufgelößt werden können, so will ich sie aufzählen.

a) Die erste Tabelle giebt unmittelbar, so weit wie ich sie hier construirt habe, sogleich alle Produkte des Multiplicators 14, von 0 bis 17. Z. B. 14 . 13 = 105. Mittelbar aber alle Produkte des Multiplicators, 14 in jeder beliebigen Zahl wie §. 115 gezeiget worden.

Alles dieses leistet auch die andere Tabelle für den Multiplicator. 15.

b) Die erste Tabelle giebt für den Divisor 14, unmittelbar sogleich alle Quotienten, und die dazu gehörigen Reste, aller Zahlen von 0 bis 251. Mittelbar, aber alle Quotienten und Reste, des Divisors 14 in jeder beliebigen Zahl, wie solches §. 115. gezeiget worden.

Das letztere leistet auch die andere Tabelle für den Divisor 15, sonst giebt sie im ersten Fall unmittelbar sogleich alle Quotienten und Reste der Zahlen von 0 bis 269.

c) Die erste Tabelle beantwortet unmittelbar die die Fragen, von 0 bis 251 Stück à 2 Mgr. $4\frac{4}{7}$ pf. Mittelbar aber alle mögliche Fragen dieser Art. Das Sück zu 2 Mgr. $4\frac{4}{7}$ pf. gerechnet.

Eben dieses leistet unmittelbar die zweyte Tabelle von 0 bis 269 Stück à 2 Mgr. $3\frac{1}{5}$ pf. Mittelbar aber beantwortet sie wiederum alle mögliche Fragen dieser Art.

d) Von der Verwandelung des Cassengeldes in Gold, und umgekehrt, beantwortet die erste Tabelle unmittelbar 251, und die zweyte Tabelle 269 Aufgaben, nemlich so, daß hier nur eine simple Addition oder Subtraktion geschiehet. Mittelbar aber beantworten sie alle mögliche Fragen dieser Art, uns bleibt nur eine Addition oder Subtraktion zu verrichten übrig.

e) Dergleichen Fragen, als die zwey letzten des vorhergehenden §. sind, beantwortet die erste Tabelle unmittelbar 251, und die zweyte Tabelle 269. Mittelbar alle.

Es wäre mir leicht, noch mehrere Fälle aufzusuchen, wo sie Genüge leisten, allein ich will es hierbey bewenden las-

sen, da diese aufgezählten schon 2114 Aufgaben geben, die unmittelbar aufgelößt werden können.

Die Zahl der mittelbar aufzulösenden Aufgaben ist unzählbar – und alles dieses befindet sich auf so einem kleinen Raum; die Construktion selbst ist so einfach, daß, wer diese Tabellen nur einmal siehet, sie auch gewiß sogleich aus dem Kopfe nachschreiben kann.

Den größten Nutzen haben diese Tabellen, als allgemeine Multiplications und Divisions Tabellen, der Zahlen 14 und 15. Wer auch nicht Mathematiker ist, wird schon ahnden, wie er für jede beliebige Zahlen sich dergleichen Tabellen entwerfen kann. Meine Rechnungsmaschine, die vielleicht vielen meiner Leser schon bekannt ist, enthält solche allgemeine Multiplications- und Divisions-Tabellen für alle einfache Zahlen unsers Zahlensystems. – Nächstens sollen von mir dergleichen Tabellen für unser, und auch für andere Zahlensysteme sehr vollständig, nebst ihrer Theorie erscheinen. – Hierdurch werde ich gewiß den Matematikern, und überhaupt jedem Rechner einen großen Dienst leisten, und viele werden einsehen lernen, daß man meine Rechenmaschiene bisher gar nicht aus dem rechten Gesichtspunkte angesehen hat, – da doch in ihr das ganze Geheimniß der Construktion liegt, welches auch ein Kästner, Klügel, Pfaff, Michelsen, Fischer, Lorenz, u. s. w. auf meinen ersten Fingerzeig, sogleich begreiffen werden.

(Die Fortsetzung im nächsten Theil.)

Samm-

Sammlung algebraischer Aufgaben.

1te Aufgabe.

Man hat zwey Arten von Kugeln: 6 Sück der ersten Art, mit 10 Sück der zweyten Art, wiegen zusammen 304 ℔.; und 10 Sück von der ersten Art, mit 15 von der zweyten wiegen zusammen 480 ℔., wie viel wiegt eine Kugel von jeder Art?

Auflösung:

Wenn man wüßte, wie viel eine Kugel von jeder Art wöge, und das Gewicht von einer Kugel ersterer Art mit 6, und das, von einer Kugel der zweyten Art, durch 10 multiplicirte, und diese zwey Produkte addirte, so fände man 304 ℔. ebenfalls, indem man das Gewicht einer Kugel der ersten Art durch 10, das der zweyten durch 15 multiplicirte, und diese beyden Produkte wieder zusammen addirte, so fände man 480 ℔. Wäre dieses, und ich stellte durch x die Zahl der Pfunde, oder das Gewicht einer Kugel ersterer Art, und durch y das Gewicht einer Kugel der zweyten Art vor, indem ich auf eben die Art schließe, so werde ich folgende zwey Gleichungen haben.

$$6x + 10y = 304 \text{ und } 10x + 15y = 480.$$

Es

Es kommt also nur darauf an, die Werthe von x und y zu finden. Dieserwegen suche ich in jeder Gleichung den Werth von x. Die erste Gleichung war:

$$6x + 10y = 304.$$

10y subtrahirt.

bleibt: $6x = 304 - 10y$

mit 6 dividirt.

giebt: $x = \frac{305 - 10y}{6} = \frac{152 - 5y}{3};$

Die zweyte Gleichung war:

$$10x + 15y = 480$$

15y subtrahirt.

bleibt: $10x = 380 - 15y$

mit 10 dividirt.

giebt: $x = \frac{480 - 15y}{10} = \frac{96 - 3y}{2}$

mithin muß:

$$\frac{152 - 5y}{3} = \frac{96 - 3y}{2} \text{ sein}$$

mit 3 multipl.

giebt: $152 - 5y = \frac{288 - 9y}{2}$

mit 2 multipl.

giebt: $304 - 10y = 288 - 9y$

+10y addirt.

bleibt: $304 = 288 + y$

288 subtrahirt.

folglich: $16 = y$

und also $x = \frac{96 - 3 \cdot 16}{2} = 48 - 3 \cdot 8 = 24.$

Probe. Eine Kugel der ersten Art wiegt also 24 ℔., und eine Kugel der zweyten Art wiegt 16 ℔. und in der That. 6 Kugeln jede zu 24 ℔. wiegen zusammen

men 144 ℔. welche mit 10 Kugeln jede zu 16 ℔. oder 160 ℔. zusammen genommen, wiegen 304 ℔. Eben so wiegen 10 Kugeln jede zu 24 ℔. 240 ℔. und 15 Kugeln jede zu 16 ℔. wiegen auch 240 ℔., also die vorigen 10 Kugeln mit diesen 15 wiegen zusammen 480 ℔. Also ganz so wie die Angabe war.

Anmerk. Die Auflösung wird kürzer, wenn man die erste Gleichung mit 3, und die zweyte Gleichung mit 2 multiplicirt, und jene von dieser abzieht. Die Rechnung selbst ist folgende:

1) $3 \cdot (6x + 10y = 304) = 18x + 30y = 912$

2) und $2\ (10x + 15y = 480) = 20x + 30y = 960$

No. 1 von No. 2 abgezogen giebt:

$$2x = 48$$

folglich: $x = 24,$

Um y zu finden, verfahre ich so:

$$20x + 30y = 960$$

mit 10 dividirt.

giebt: $2x + 3y = 96$

2 x subtrahirt.

giebt: $3y = 96 - 2x$

mit 3 dividirt.

folglich: $y = \frac{26 - 2x}{3} = 32 - \frac{2}{3}x$

Da nun $x = 24$, so ist $y = 32 - \frac{2}{3} \cdot 24 = 32 - 16 = 16$.

2te Aufgabe.

Ein Stück Erz von 8,95 Cubikfuß, welches aus japanischen Kupfer und reinem Zinn bestehet, wiegt 5531 ℔. Jeder Cubikfuß japanisches Kupfer wiegt 630 ℔. und jeder Cubikfuß Zinn wiegt

laut der Aufgabe hat nun A so viel Schaafe als B, mithin ist

$$x - 30 = y + 30 \quad - 30 \text{ subtr.}$$

$$\text{giebt} \quad x = y + 60.$$

Hätte aber B an A 40 Schaafe gegeben, so behielt B y - 40, und A hätte alsdann gehabt x + 40, alsdann hätte aber A 3mal so viel Schaafe als B gehabt.

Dieses giebt demnach wieder folgende Gleichung:

$$x + 40 = 3 (y - 40)$$

$$\text{oder} \quad x + 40 = 3 y - 120 \quad 40 \text{ subtr.}$$

$$\text{giebt} \quad x = 3 y - 160.$$

vorhin fanden wir $x = y + 60$.

$$\text{mithin ist} \quad 3 y - 160 = y + 60 \quad + 160 \text{ addirt.}$$

$$\text{bleibt} \quad 3 y = y + 220 \quad y \text{ subtr.}$$

$$\text{bleibt} \quad 2 y = 220 \quad \text{mit 2 dividirt.}$$

$$\text{folglich} \quad y = 110 \text{ Schaafe.}$$

$$\text{also } x = y + 60 = 170 \text{ Schaafe.}$$

Probe. Wenn A von seinen 170 Schaafen, an B der nur 110 Schaafe hat, 30 abgiebt, so behält A 140 und B hat alsdann auch 140 Schaafe.

Erhält aber A von B 40 Schaafe, so hat A alsdann 210 Schaafe, und B behält 70 Schaafe, und 210 ist = 3. 70.

Anmerkung. Diese Auflösung wird kürzer, wenn man die erste Gleichung von der zweyten abzieht. Z. B.

Die zweyte Gleichung war $x + 40 = 3y - 120$
Die erste Gleichung ist $x - 30 = y + 30$
subtr.
bleibt $70 = 2y - 150$
$+ 150$ add.
giebt $220 = 2y$.

und folgl. $110 = y$.

x wird wie vorhin gefunden.

Wer x zuerst suchen wollte, verfährt am kürzesten so:

Da $x - 30 = y + 30$, so multiplicire man diese Gleichung mit 3, giebt

$$3x - 90 = 3y + 90$$

Es ist ferner $x + 40 = 3y - 120$
subtr.
bleibt $2x - 130 = 210$
mit 2 dividirt.
giebt $x - 65 = 105$.

folgl. $x = 105 + 65 = 170$.

4te Aufgabe.

Man weiß, daß 4 ℔. frischer und 3 ℔. gesalzener Lachs zusammen $2\frac{1}{2}$ rthlr. kosten, ferner daß 2 ℔. und 1 ℔. gesalzener Lachs zusammen für 1 rthlr. verkauft sind. Wie hoch ist ein ℔. frischer, wie hoch ein ℔. gesalzener Lachs angerechnet?

Auflösung:

Ein ℔. frischer Lachs hat x gr. gekostet, und ein ℔. gesalzener Lachs y gr.

Daher haben 4 ℔. frischer Lachs $4x$ gr. und 3 ℔. gesalzener Lachs $3y$ gr. gekostet.

Mit-

Mithin muß der Aufgabe gemäß,

$4x + 3y = 2\frac{1}{2} . 24$ gr. sein

oder $4x + 3y = 60$ gr. sein

——————————— 3 y abgezogen.

bleibt $4x = 60 - 3y$

——————————— mit 4 dividirt.

giebt $x = \frac{60 - 3y}{4}$

Ferner haben 2 ℔. frischer gekostet 2 x gr. und 1 ℔. gesalzener $1y = y$ gr.

Daher ist wiederum

$2x + y = 1 . 24$ gr.

——————————— y subtrah.

bleibt $2x = 24 - y$

——————————— mit 2 dividirt.

giebt $x = \frac{24 - y}{2}$

vorhin war $x = \frac{24 - y}{4}$ gefunden.

Es ist also auch

$\frac{24 - y}{2} = \frac{60 - 3y}{4}$

——————————— mit 4 multipl.

giebt $48 - 2y = 60 - 3y$

——————————— + 3 y subtrah.

bleibt $48 + y = 60$

——————————— 48 subtrah.

folgl. $y = 12$ gr., so viel hat der gesalzene Lachs gekostet.

und $x = \frac{24 - y}{2} = \frac{24 - 12}{2} = 6$ gr., so viel hätte also der frische Lachs gekostet.

Ich habe hier noch zwey andere Auflösungen, davon die erste sehr wenig von der vorhergehenden unterschieden ist, doch man beurtheile selbst.

Zweite Auflösung.

Ein ℔. frischer Lachs habe x rthlr. gekostet, und ein ℔. gesalzener y rthlr.; so erhalten wir folgende zwey Gleichungen.

$$4x + 3y = \tfrac{5}{2} \text{ rthlr.}$$

und $2x + y = 1$ rthlr.

Aus der ersten Gleichung finden wir,

$$x = \frac{5}{8} - \frac{3y}{4} = \frac{5 - 6y}{8}$$

Aus der zweyten Gleichung finden wir, daß auch

$$x = \frac{1 - y}{2} \text{ ist,}$$

folgl. $\frac{1-y}{2} = \frac{5 - 6y}{8}$ mit 8 multipl.

giebt $4 - 4y = 5 - 6y$ + 6y addirt.

bleibt $4 + 2y = 5$ 4 subtrah.

bleibt $2y = 1$ mit 2 dividirt.

giebt $y = \tfrac{1}{2}$ rthlr. = 12 gr.

und eben so finden wir $= \tfrac{1}{4}$ rthlr. = 6 gr.

Dritte Auflösung.

Es wird einem jeden bey dieser Aufgabe gleich möglich seyn, einzusehen, daß sowol ein ℔. frischer, als auch 1 ℔. gesalzener Lachs, nach dem hier gegebenen Dato, keinen ganzen Thaler kosten kann. Daher dürfte jemanden vielleicht einfallen, so zu setzen: 1 ℔ frischer Lachs soll $\frac{1}{x}$ rthlr. und ein ℔. gesalzener Lachs $\frac{1}{y}$ rthlr. gekostet haben, hieraus hätte man nun laut der Aufgabe folgende Gleichungen.

A.) $\frac{4}{x} + \frac{3}{y} = 2\frac{1}{2}$ rthlr. und B.) $\frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 1$ rthlr.

Wenn wir die Gleichung A mit xy multipliciren, so haben wir $4y + 3x = \frac{5}{2}xy$ mit $\frac{5}{2}$ dividirt.

giebt $\frac{8y + 6x}{5} = xy$.

Wenn wir die Gleichung B ebenfalls mit xy multipliciren, so erhalten wir $2x + x = xy$.

Daher $2x + y = \frac{8y + 6x}{5}$ mit 5 multipl.

giebt $10y + 5x = 8y + 6x$
$8y + 5x$ subtrah.

bleibt $2y = x$.

Setzen wir diesen für x gefundenen Werth in der Gleichung B, so ist statt $\frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 1$ rthlr. nun mehro

$\frac{2}{2y} + \frac{1}{y} = 1$ rthlr.

oder $\frac{1}{y} + \frac{1}{y} = 1$ rthlr.

oder $\frac{2}{y} = 1$ rthlr.

folgl. $\frac{1}{y} = \frac{1}{2}$ rthlr. und daher $\frac{1}{x} = \frac{1}{2y} = \frac{1}{4}$ rthlr.

Ohne Streit ist die 3te Auflösung am weitläuftigsten.

Jetzt will ich noch zeigen, wie jede der 3 Auflösungsarten hätten kürzer aufgelöst werden können.

In der ersten Auflösung multiplicire man die zweyte Gleichung mit 3, und ziehe die erste Gleichung ab, und verfahre ferner, wie folgende Rechnung zeigt.

Erste Gleichung $= 2y + x = 24$ gr.
3 multipl.

giebt $6x + 3y = 72$.

Die

Die zweyte Gleichung $= 4x + 3y = 60$
subtrah.
bleibt $2x \quad = 12$

folgl. $x \quad = 6$ gr.
und $y = 24 - 2x = 12$ gr.

Noch vortheilhafter rechnet man folgender Gestalt:

Zweyte Gleichung $4x + 3y = 60$ gr.
Das zweyfache der ersten $= 4x + 1y = 48$
subtrah.
bleibt $y = 12$ gr.

Daher $x = \frac{24 - y}{2} = 6$ gr.

Die andere Auflösung übergehe ich, weil sie auf eben die vorhergehende Art sich verkürzen läßt. Allein die dritte darf ich nicht unberührt lassen.

Aus der Gleichung A erhält man folgende:
$8y + 6x = 5 \cdot xy$, die Gleichung B mit 4 multipl.
$8y + 4x = 4 \cdot xy$
subtrahirt.
bleibt $2y = xy$
mit x dividirt.
folgl. $2 = y$.

Daher $\frac{1}{y} = \frac{1}{2}$ rthlr. $+ \frac{1}{x} = \frac{1}{4}$ rthlr. wie vorhin.

5te Aufgabe.

Es werden zwey Zahlen verlangt. Wenn man die eine um 11 vergrößert, so wird sie doppelt so groß, als die andere; und wenn man die zweyte um 8 vergrößert, so wird sie doppelt so groß, als die erste.

Erste Auflösung.

Es sey die erste Zahl x, die andere y. So erhält man laut der Bedingungen der Aufgabe, folgende zwey Gleichungen.

$$x + 11 = 2y$$
$$y + 8 = 2x.$$

Aus der ersten Gleichung folgt $x = 2y - 11$;

und der zweyten . $x = \frac{y + 8}{2}$

folgl. $2y - 11 = \frac{y + 8}{2}$ mit 2 multipl.

giebt $4y - 22 = y + 8$ + addirt.

giebt $4y = y + 30$ y subtrah.

bleibt $3y = 30$ mit 3 dividirt.

mithin $y = 10$.

Und $x = 2y - 11 = 2 . 10 - 11 = 20 - 11 = 9$.

Probe. Wird 9 um 11 und 10 um 8 vermehrt, so kömmt im ersten Fall $9 + 11 = 20 = 2 . 10$, und im zweyten Fall kömmt $10 + 8 = 18 = 2 . 9$, wie sich gehört.

Andere Auflösungen.

Man addire die beyden Gleichungen,

$$x + 11 = 2y$$
$$y + 8 = 2x$$

$$x + y + 19 = 2(x + y)$$ $x + y$ subtrah.

bleibt $19 = x + y$, als die Summe beyder Zahlen.

Man subtrahire auch beyde Gleichungen von einander, so erhält man:

$x - y$

$$x - y + 3 = 2(y - x)$$
——————————— $x - y$ subtrahirt.

bleibt: . . $3 = 3(y - x)$
——————————— mit 3 dividirt.

kömmt: . $1 = y - x$, als die Differenz beyder Zahlen.

Aber nun ist bekannt, wie man aus der bekannten Summe und der Differenz zweyer Zahlen, die Zahlen selbst finden kann; nemlich: Die halbe Summe plus der halben Differenz, giebt die größere, die halbe Summe weniger der halben Differenz die kleinere Zahl. Folglich: $\frac{19}{2} + \frac{1}{2} = 10$; und $\frac{19}{2} - \frac{1}{2} = 9$, wie vorhin.

Diese Auflösung hat vor der ersten in ganz allgemeinen Fällen den Vorzug, wie sich sogleich bey folgender allgemeinen Aufgabe zeigen wird.

6te Aufgabe.

Es werden zwey Zahlen verlangt. Wenn man die eine um a vergrößert, so wird sie n mal so groß, als die andere; und wenn man die zweyte um b vergrößert, so wird sie n mal so groß, als die erste.

Erste Auflösung:

Die erste Zahl sey x, die andere y. So ist laut der Aufgabe . . $x + a = ny$ (A

und $y + b = nx$ (B

aus A folgt $x = ny - a$

aus B folgt $x = \frac{y + b}{n}$

folglich: $ny - a = \frac{y + b}{n}.$

——————————— mit n multiplicirt.

giebt: . $n^1 - na = y + b$

——————————— + na addirt.

giebt: $n^2y = y + b + na$

y subtrahirt.

bleibt: $(n^2 - 1)\,y = b + na$

mit $n^2 - 1$ dividirt.

giebt $y = \frac{b + na}{n^2 - 1}$;

also: $x = n \cdot \left(\frac{b + na}{n^2 - 1}\right) - a = \frac{nb + n^2a - n^2a + a}{n^2 - 1} =$

$= \frac{a + nb}{n^2 - 1}$ und hieraus folgt $x + y = \frac{a + nb}{n^2 - 1} + \frac{b + na}{n^2 - 1} =$

$= \frac{na + a + nb + b}{n^2 - 1} = \frac{(n + 1)\,a + (n + 1)\,b}{n^2 - 1} =$

$= \frac{(n + 1)(a + b)}{n^2 - 1} = \frac{(n + 1)(a + b)}{(n + 1)(n - 1)} = \frac{a + b}{n - 1}$;

und $x - y = \frac{a - na + nb - b}{n^2 - 1} = \frac{(n - 1)\,b - (n - 1)\,a}{n^2 - 1} =$

$= \frac{(n - 1)(b - a)}{(n + 1)(n - 1)} = \frac{b - a}{n + 1}$.

Andere Auflösung.

$x + a = ny$ (A

und $y + b = nx$ (B

addirt.

$x + y + a + b = n\,(x + y)$

$x+y$ subtrahirt.

bleibt: $a + b = (n - 1)\,(x + y)$

mit 12 — 1 dividirt.

giebt: $\frac{a + b}{n - 1} = x + y$;

Die

Die Gleichung A von B subtrahirt, giebt:

$$y - x + b - a = n\,(x - y)$$

x—y addirt.

kommt: $b - a = (n + 1)\,(x - y)$

mit (n+1) dividirt.

$$\text{giebt: } \frac{b - a}{n + 1} = x - y;$$

$$\text{also: } x = \frac{a + b}{2(n - 1)} + \frac{b - a}{2(n + 1)} = \frac{a + nb}{n^2 - 1};$$

$$\text{und } y = \frac{a + b}{2(n - 1)} - \frac{b - a}{2(n + 1)} = \frac{b + na}{n^2 - 1}.$$

Wenn nun n und a sehr groß sind, so ist es bequemer, nicht gleich die Zahlen selbst zu berechnen, sondern lieber erst ihre Summe und Differenz.

In Worten ausgedrückt, geben die gefundenen allgemeinen Formeln folgende Regeln.

Um die Summe beyder Zahlen zu finden:

Addire die beyden zu addirenden Zahlen, und dividire diese Summe, durch die Zahl weniger Eins, die da anzeigt, wie vielmal eine von den gesuchten Zahlen größer wird.

Um die Differenzen zu finden:

Subtrahire die beyden zu addirenden Zahlen, und dividire hierin mit der um eins vermehrten Zahl, die da anzeigt, wie vielmal eine von den gesuchten Zahlen größer wird.

Um eine von den Zahlen selbst zu finden:

Addire zu der einen der zu addirenden Zahlen ein Vielfaches aus der andern, inder Zahl die

da anzeigt, wie vielmal eine von den gesuchten Zahlen größer wird, und diese Summe dividire mit dem um Eins verminderten Quadrat der letztgedachten Zahl.

In der 5ten Aufgabe, war a = 11; b = 8, und n = 2; also die Summe beyder Zahlen $= \frac{11 + 8}{2 - 1} = 19$;

die Differenz beyder Zähler $= \frac{11 - 8}{2 + 1} = 1$.

Wer die Differenz nach der oben gegebenen Regel sucht, könnte auch leicht so rechnen $\frac{8 - 11}{2 + 3} = - 1$, dieses macht in der Rechnung keinen Unterschied, und man findet die Zahlen doch richtig. Die Ursache liegt in der algebraischen Addition und Subtraktion, wo das Addiren öfters ein Subtrahiren ist, und umgekehrt.

Sucht man auch die Zahlen selbst, nach der schriftlichen Regel, so stehet die Rechnung wie folget:

Eine der gesuchten Zahlen $= \frac{11 + 2 . 8}{2^2 - 1} = 9$

die andere $= \frac{8 + 2 . 11}{2^2 - 1} = 10$, alles wie in der 5ten Aufgabe.

7te Aufgabe.

Zwey Schäfer A und B, machen einander folgende Forderung: A sagt zu B gieb mir eines von deinen Schaafen, so habe ich alsdann gerade doppelt so viel, als du; Nein sagt B, gieb du mir vielmehr eins von deinen Schaafen, denn haben wir gerade gleich viel. Wie viel Schaafe mag ein jeder gehabt haben?

Auf-

Auflösung.

A habe x und B habe y Schaafe gehabt. Gäbe nun B eins von seinen Schaafen an A, so behälte B nur noch (y - 1) Schaafe, und A hätte nun (x + 1) Schaafe. A sagt aber er hätte nun doppelt so viel Schaafe als B, also muß $x + 1 = 2 (y - 1)$ seyn.

Hätte aber nicht B an A, sondern A an B eines von seinen Schaafen gegeben, so würde A nur noch (x - 1), B aber (y + 1) Schaafe haben. Nun sagt B, sie hätten alsdann gleich viel Schaafe, daher muß auch:

$$x - 1 = y + 1 \text{ seyn.}$$

Vorhin fanden wir: $x + 1 = 2y - 2$

aus der obern Gleichheit finden wir

$$x = y + 2$$

und aus der untern Gleichung: $x = 2y - 3$

folglich, $y + 2 = 2y - 3$,

Nemlich: wenn zwey Größen einer dritten gleich sind, so sind sie einander selber gleich.

also $2 = y - 3$

mithin $5 = y$

daher $x = y + 2 = 5 + 2 = 7$.

Andere Auflösung.

$$x + 1 = 2y - 2$$
$$x - 1 = y + 1$$
subtrahirt.
$$+ 2 = y - 3$$

folglich wie vorhin $5 = y$.

Probe. A hat 7 und B hat 5 Schaafe; giebt nun B an A Eins, so behält er 4 und A hat nun 8, also grade doppelt so viel. Giebt aber A Eins an B, so behält er 6 und B bekömmt nun auch 6, also beyde gleichviel.

8te Auf-

8te Aufgabe.

Von zwey Zahlen werden folgende Verhältnisse angegeben. Nimmt man von der einen Zahl einige bekannte Einheiten weg und addirt diese zur andern Zahl, so soll diese einige bekannte mal größer oder kleiner werden, als jene alsdann ist. Was sind das für Zahlen?

Auflösung.

Die zwey unbekannten Zahlen sollen durch x und y bezeichnet seyn.

a und b sollen die bekannten Einheiten und Größen bedeuten, die man von der einen unbekannten Größe wegnimmt und zu der andern addirt.

m, n, sollen anzeigen, wie vielmal die eine unbekannte Größe nach Abzug des a oder b größer oder kleiner geworden ist, als die andere, durch Hinzuthun der a und b.

Nimmt man demnach von y, a weg, und addirt diese a zu x, so bleibt bey jener $(y - a)$, und bey dieser kömmt $(x + a)$. Nun sey $(x + a)$, n mal so groß, als $(y - a)$, so giebt diese Bedingung folgende Gleichung:

$$x + a = n(y - a) = ny - na$$

Man subtrahire nun b von x, so erhält man $(x - b)$; diese b addire man zu y, so kömmt $y + b$.

Hier sey nun: $x - b = m(y + b)$

oder: $x - b = my + mb$

vorhin fanden wir: $x + a = ny - na$, die obere Gleichung von der untern abgezogen giebt . . $a + b = (n - m)y - na - mb$

also: $na + a + mb + b = (n - m)y$

oder: $(n + 1)a + (m + 1)b = (n - m)y$

folglich: $\dfrac{(n + 1)a + (m + 1)b}{n - m} = y.$

Nun

Nun wollen wir auch den Werth für x suchen.
Es war: $x - b = my + mb$

daher: $x = my + (m+1)b$, wird hier der für y gefundenen Werth gesetzt; so erhält man:

$$x = \frac{m(n+1)a + m(m+1)b}{n-m} + (m+1)b$$

oder:

$$x = \frac{m(n+1)a + m(m+1)b + (n-m)(m+1)b}{n-m}$$

oder:

$$x = \frac{m(n+1)a + m(m+1)b + n(m+1)b - m(m+1)b}{n-m}$$

mithin:

$$x = \frac{m(n+1)a + n(m+1)b}{n-m}.$$

Dieses ist die allgemeinste Aufgabe, dergleichen die 3te und 7te nur für besondere Fälle sind. Z. B. in der 3ten Aufgabe, ist: $30 = b$; $a = 40$, $m = 1$, und $n = 3$,

folglich: $y = \frac{(3+1).40 + (1+1).30}{3-1} = \frac{4.40 + 2.30}{2} = 110$ und

$x = \frac{1.(3+1).40. + 3.(1+1).30}{3-1} = \frac{4.40 + 3.2.30}{2} = 100$ In der Aufgabe ist: $a = b = 1$, $n = 2$ und $m = 1$, folglich für diesen Fall $y = \frac{(2+1).1 + (1+1).1}{2-1} = 3 + 2 = 5$

und $x = \frac{1.(2+1).1 + 2(1+1).1}{2-1} = 3 + 2.2 = 7$

In beyden Aufgaben fanden wir für x und y, eben diese Werthe

Die Formel für y ist einfacher, als für x, daher würde ich immer erst y suchen, alsdann würde ich nicht x aus der allgemeinen Formel berechnen, sondern da ich weiß, daß

$$x = my + (m + 1) b$$

so rechne ich nach dieser Formel wo y schon gefunden, dies ist ja bequemer. In dem ersten Beyspiele fanden wir vorhin $y = 110$; daher nach dieser Formel:

$$x = 110 + 2 . 30 = 170,$$ wie vorhin.

Im zweyten Beyspiele war $y = 5$, also:

$$x = 5 + 2 . 2 = 7$$ auch wie vorhin.

Aber höre ich den Anfänger fragen: wozu nützt es also, daß wir die allgemeine Formel auch für x gesucht haben? Antwort: Es ist oft nöthig das Verhalten der unbekannten Größen gegen einander zu bestimmen, und dieses kann wol nicht anders geschehen, als wenn ihr Werth in lauter bekannten Größen angegeben wird, hier aber dient es Anfängern, die ihnen so nöthige Fertigkeit in Behandlung analytischer Formeln zu verschaffen.

Allgemeine Formeln haben noch das vorzügliche, daß sich aus ihnen für besondere Fälle auch Formeln ableiten lassen. Z. B. sollte $a = b$ seyn, so erhalten wir folgende Formeln:

$$y = \frac{(m + m + 2) a}{n - m}$$

und $$x = \frac{[m (n + 1) + n (m + 1)] . a}{n - m}$$

Wollten wir $n = m$ setzen, so würde in allen Formeln für y und x der Divisor $n - m = 0$, der Dividendus aber bleibt eine ganze positive Zahl.

Offen-

Offenbar wird y und x desto größer, je kleiner die Differenz von $n - m$ ist, aber kleiner als 0 kann sie doch wol nicht werden?

Je kleiner der Divisor ist, je öfterer ist er im Dividendus enthalten, ist er nun kleiner geworden, als jede Größe, die sich angeben läßt, so muß offenbar auch der Quotient größer geworden seyn, als jede Größe, die sich angeben läßt. Das heißt mit andern Worten: der Divisor ist unendlich klein und der Quotient unendlich groß geworden, beyde also für uns nicht mehr bestimmbar. Also lassen sich für $n = m$, für x und y keine Werthe in endlichen Größen mehr angeben, weil x und y Größen geworden sind, die größer, als jede angebliche Größe sind. Die Aufgabe ist also für $n = m$ unmöglich.

Setzen wir aber $m > n$, so können wir ja eigentlich $n - m$ nicht angeben, und daher ist auch dieser Fall unmöglich, wenn nemlich die Anwendung auf solche besondere Fälle gemacht wird, als die 3te und 7te Aufgabe enthält, sonst bleibt sie im abstrakto allerdings richtig, x und y sind nemlich alsdann negativ.

Aus besondern Anwendungen, die man von solchen abstrakten Aufgaben machen will, muß man zu beurtheilen wissen: ob der zu behandelnde Gegenstand solche willkürliche Bestimmungen, die man öfters macht, erlaubt oder nicht. Z. B. so muß der Werth für x und y für solche Gegenstände, als die 3te und 7te Aufgabe enthalten, immer in ganzen Zahlen gefunden werden, auch müssen a und b nothwendig in solchen Fällen ganze Zahlen bedeuten, weil hier gewiß blos von ganzen Schaafen die Rede seyn kann. Aber n und m können ganze Zahlen, auch Brüche seyn, nur würden im letztern Falle doch viele Ausnahmen stattfinden. Z. B. n darf weder als ganze Zahl, noch kleiner denn m seyn,

weil sonst $n - m$ negativ würde, und daher auch x und y, welches in solchen Fällen aber nicht stattfinden kann. Ferner, wenn n ein Bruch seyn soll, so würde ich die Nenner entweder $= a$ oder einen adequoten (gleichen Theil) von a gleich nehmen, dieses gilt auch von m in Ansehung b, damit x und y ganze Zahlen würden; ich weiß wohl, daß dieses letztere nicht nothwendig ist, und daß auch andere Brüche für n und m gesetzt, ganze Zahlen für x und y geben können, allein ich wollte auch nur hier die leichtern Vorschriften geben. Es sey $a = 4; 0$ und $b = 30$, soll nun n ein Bruch seyn, m aber eine ganze Zahl für $= 1$; so kann ich $n = \frac{c}{40}, \frac{c}{20}, \frac{c}{10}, \frac{c}{5}, \frac{c}{8}, \frac{c}{4}, \frac{c}{2}$.

Die Nenner sind hier nemlich lauter Divisoren von $a = 40$. Der Zähler c muß allemal größer, als sein Nenner seyn, und zwar so, daß dieser Bruch $> m$ wird, weil sonst $n - m$ negativ würde.

Nun läßt sich in besondern Fällen sehr leicht bestimmen, wie groß er angenommen werden darf. Z. B. da hier $a = 40$, $b = 30$, 12 soll $= \frac{c}{10}$ seyn, und m eine ganze Zahl, so ist

$$y = \frac{\left(\frac{c}{10} + 1\right).\,40 + (m + 1)\,30}{\frac{c}{10} - m.}$$

oder
$$y = \frac{\left(\frac{c}{10} + 1\right).\,400 + (m + 1).\,300}{c - 10\,m.}$$

oder
$$y = \frac{((c + 10)\,2 + (m + 1).\,15).\,20}{c - 10\,m.}$$

Hier

Hier sehe ich sogleich ein, daß ich für y gewiß eine ganze Zahl erhalte, wenn ich c so annehme, daß c - 10 m in 20 aufgeht. Wäre m = 1, so könnte c, 11, 12, 14, 15 und 20, weil alsdann c - 10 = 1, 2, 4, 5, 10, wären alles Zahlen, die in 20 aufgehen. Auf diese Art wäre es also leicht, Zahlen für besondere Fälle zu bestimmen. Doch ich bin vielleicht schon für manchen Anfänger unverständlich geworden, diesen rathe ich, diese Aufgabe zu überschlagen und sie ein andermal zu lesen.

9te Aufgabe.

Cajus spricht zu Titio: gieb mir $\frac{1}{3}$ von deinem Gelde und noch 3 Fl., so habe ich dreymal so viel, als dir geblieben. Titius spricht: gieb mir von deinem die Hälfte und noch 2 Fl., so habe ich neunmal so viel, als Du. Wie viel hatte jeder?

Auflösung:

Cajus hatte x, Titius y, bekommt Cajus vom Titio $\frac{1}{3}$ und 3 Fl., so hat er $x + \frac{y}{3} + 3$, und Titius behält $y - \frac{y}{3} - 3 = \frac{2y}{3} - 3$; weil nun letzteres $\frac{2y}{3} - 3$ dreymal genommen, ersterm gleichseyn soll, so ist $x + \frac{y}{3} + 3 = 3. \left(\frac{2y}{3} - 3\right)$

oder A, $x + \frac{y}{3} + 3 = 2y - 9$.

Bekommt aber Titius vom Cajus die Hälfte seines Geldes und 2 Fl., so hat er $y + \frac{x}{2} + 2$.

Cajus aber $\frac{x}{2} - 2$.

Wird dieses letztere 9mal genommen, so ist es $= \frac{9x}{2} - 18$, und dieses soll so viel sagen, als des Cajus seines $= y + \frac{x}{2} + 2$. Es ist also:

$$B, \; y + \frac{x}{2} + 2 = \frac{9x}{2} - 18$$

Hieraus folgt $y + 20 = 4x,$

folglich $\frac{y}{4} + 5 = x.$

Die Gleichung A war

$$x + \frac{y}{3} + 3 = 2x - 9$$

folgl. $x = \frac{5.\,y}{3} - 12.$

vorhin fanden wir $x = \frac{y}{4} + 5$

Wenn nun zwey Größen einer dritten gleich sind, so sind sie einander selbst gleich, daher:

$$\frac{5.y}{3} - 12 = \frac{y}{4} + 5$$

mithin $\frac{5.y}{3} - \frac{y}{4} = 17$

oder $17\,y = 3.\,4.\,17.$

folgl. $y = 3.\,4 = 12.$

und $x = \frac{y}{4} + 5 = \frac{12}{4} + 5 = 8.$

10te Aufgabe.

Ihrer drey verrichten ein Werk, daß sie zusammen 120 Tagelohne verdienen, der erste bekommt täglich 20 Kreuzer, der andere 24, der dritte 30 Kreuzer. Es bekommt aber einer so viel als der andere. Wie viel Tage hat jeder gearbeitet?

Auflösung:

Der erste hat x Tage gearbeitet, bekommt also $20\,x$;

Der andere y, und bekommt $24\,y$.

Der dritte $120 - x - y$, bekommt also $(120 - x - y).\,30 = 3600 - 30\,x - 30\,y.$

Nun

Nun ist $20\,x = 24\,y$

folgl. $x = \frac{24}{20}\,y = \frac{6}{5}\,y.$

Ferner ist $24\,y = 3600 - 30\,x - 30\,y.$

Setzen wir nun in dieser Gleichung den so eben für x gefundenen Werth, so erhalten wir

$$24\,y = 3600 - \frac{30.\,6y}{5} - 30\,y$$

oder $24\,y = 3600 - 6.\,6\,y - 30\,y$

oder $24\,y = 3600 - 66\,y$

$90\,y = 3600$

folgl. $y = 40.$

Da nun $x = \frac{6.\,y}{5} = \frac{6.\,40}{5} = 48$ ist, so ist auch $120 - 48 - 40 = 32$ gleich den Tagen, die der dritte gearbeitet hat.

Probe. Der erste Arbeiter erhält $48.\,20 = 960$ Kreuzer.
Der 2te bekommt $40.\,24. = 960$ Kreuzer.
Der 3te erhält . $32.\,30 = 960$ Kreuzer.

$48 + 40 + 32 = 120$ Tage.

Allgemein liesse sich diese Aufgabe also abfassen.

11te Aufgabe.

Ihrer 3 verrichten ein Werk, daß sie zusammen A Tagelohn verdienen; der erste bekommt täglich a; der zweyte b; der dritte c, Kreuzer. Es bekommt aber der eine so viel, als der andere. Wie viel bekommt ein jeder?

Auflösung:

Der erste habe x Tage gearbeitet, so bekommt er Lohn $a\,x$.

Der

Der zweyte y, so bekommt er by Lohn; so hat der dritte gearbeitet (A - x - y) Tage; bekommt also an Lohn Ac - cx - cy.

Da nun der Lohn eines jeden gleich viel beträgt, so ist: . . $ax = by = Ac - cx - cy.$

Also $ax = by$

folglich $x = \frac{by}{a}$

Diesen Werth von x in $Ac - cx - cy$ gesetzt, giebt

$$by = Ac - c \cdot \frac{by}{a} - cy$$

also: . $aby = A \cdot ac - bcy - acy$

und $(ab + ac + bc)\,y = A \cdot ac$

folglich $y = \frac{A \cdot ac}{ab + ac + bc}$

und $x = \frac{A \cdot bc}{ab + ac + bc}$

In der 10ten Aufgabe war $A = 120$; $a = 20$, $b = 24$ und $c = 30$.

daher: $y = \frac{\cancel{120} \cdot 20 \cdot 30}{\cancel{20} \cdot \underset{4}{\cancel{24}} + \cancel{20} \cdot \underset{5}{\cancel{30}} + \underset{6}{\cancel{24}} \cdot \cancel{30}} = \frac{20 \cdot \overset{2}{\cancel{30}}}{\cancel{15}} = 40$

wie vorhin.

In Worten lautet die Formel für y so:

1) Man multiplicire das Tagelohn des ersten und zweyten, des ersten und dritten, und das Tagelohn des zweyten und dritten, und addire alle 3 Produkte zu einander.

2) Ferner multiplicire man die Anzahl von Tagelohnen mit dem Tagelohn des ersten und dritten.

3)

3) Dividire No. 2 mit No. 1, so hat man y.

Hat man nun y gefunden, so findet sich $x = \frac{by}{a}$ sehr leicht durch eine simple Regel-Detri, es ist $a : b = y : x$

In Worten:

Zu dem Tagelohne des ersten, des zweyten und zu den Tagen, die der zweyte gearbeitet hat, suche man die vierte Proportionalzahl, so findet ihr *x*.

Z. B. $20 : 24 = 40 : \frac{2 \cdot 40 \; 24}{20} = 48$ Tage $= x$

Die Tage des 3ten finden sich nun leicht aus $A - (x + y)$ das heißt:

Ich ziehe die Summe der Arbeitstage der beyden ersten, von der sämtlichen Anzahl der Arbeitstage ab, so finde ich die Tage des dritten.

Z. B. $120 - (40 + 48) = 120 - 88 = 32$ Tage.

Die allgemeine Formel für die Tage des dritten wäre diese:

$$A - \frac{Aac + Abc}{ab + ac + bc} = \frac{Aab}{ab + ac + bc}$$

Als Probe, ob diese 3 allgemeinen Formeln richtig sind, dient, daß man sie addirt, wo sie zusammengenommen A geben müssen

nemlich: $\frac{A \cdot ac + Abc + Aab}{ab + ac + bc} = \frac{A(ac + bc + ab)}{ab + ac + bc} = A$

Wäre $a = b$, so würde $y = x = \frac{A \cdot c}{b + 2c}$

und die Arbeitstage des dritten $= \frac{Ab}{b + 2c}$.

Wäre

Wäre aber gar $a = b = c$
so wird $y = x =$ den Arbeitstagen des dritten $= \frac{A}{3}$,
wie es auch wirklich seyn muß. Denn wenn ein jeder gleichen Tagelohn, nach geendigter Arbeit ausgezahlt erhält, so müssen sie auch alle gleich lange gearbeitet haben.

12te Aufgabe.

Ein Gelehrter, der geheime Künste verstehen will, wahrsagt zween Freunden Acton und Bion, über die Dauer ihres Lebens, wie folgt:

Ihr brächtet euer Leben auf ein gleich hohes Alter, wenn es möglich wäre, daß Acton 4 Jaher länger lebte, als er, (wie ich voraus sehe,) wirklich leben wird; dagegen Bion 4 Jahre weniger lebte, als er wirklich sein Alter bringen wird.

Oder (um mich verständlicher zu machen): Acton würde noch so alt werden, als Bion, wenn er seinem gesetzten Lebensziel noch 4 Jahre hinzuzuthun vermöchte, und dagegen Bion von den bestimmten Jahren seines Lebens vier Jahre abgäbe, oder um 4 Jahre früher vor seinem einmal gesetzten Lebensziel stürbe.

Wie alt wird nach diesen Reden, wol Acton und Bion werden? Sind Data genug vorhanden, um den Sinn des Wahrsagers bestimmt heraus zu bringen? – Die Auflösung antwortet: Ja!

Auflösung.

Actons Lebensjahre seyn $= x$
Bions . . . $= y$

Den

Dem ersten Theile der Rede des Gelehrten gemäß, muß

$$x + 4 = y - 4 \text{ seyn (A}$$

+4 subtrahirt.

mithin: $x = y - 8$

Aber dem zweyten Theile der Rede des Wahrsagers gemäß, ist.

$$2.(x - 4) = y + 4$$

oder $2x - 8 = y + 4$ (B

— 8 subtarih.

bleibt: $2x = y + 12$

mit 2 dividirt.

mithin $x = \frac{y + 12}{2}$

Demnach ist: $y - 8 = \frac{y + 12}{2}$.

mit 2 multipl.

giebt: $2y - 16 = y + 12$

— 16 subtratr.

bleibt: $2y = y + 28$

y subtrahirt.

folglich: $y = 28$ Jahr,

und also: $x = y - 8 = 20$ Jahr.

Es wird also Acton 20 Jahr, und Bion 28 Jahr alt werden.

Probe. Wenn Acton 4 Jahr länger lebte, als er wirklich leben wird, so ist er alsdann:

$20 + 4 = 24$ Jahr alt.

Und lebte Bion 4 Jahr weniger, als er wirklich leben wird, so würde er nur alt:

$28 - 4 = 24$ Jahr, also eben so alt alsdann, wie Acton.

Lebte Bion 4 Jahr noch länger, als er wirklich leben wird, so würde er:

$28 + 4 = 32$ Jahr alt.

Acton aber 4 Jahr weniger, als er wirklich lebt, so wird er nur alt:

$$20 - 4 = 16 \text{ Jahr.}$$

und 32 ist gleich $2 \cdot 16$

Die Auflösung wird kürzer, wenn wir die Gleichung A, von B abziehen.

Es war

$$\begin{array}{rl} B) & 2x - 8 = y + 4 \\ A) & x + 4 = y - 4 \\ \hline & x - 12 = y + 8, \end{array}$$

folglich $x = 20$.

13te Aufgabe.

Ein Knabe sprach zum andern, hätte ich nur noch neun Thaler von deinem Gelde, so hätte ich siebenmal so viel, als du alsdann hättest. – Du bist unmäßig in deinen Wünschen, sprach der andere, gieb mir lieber neun Thaler von deinem Gelde, damit wir beyde gleichviel haben. Wie viel Geld hätte wol jeder Knabe?

Auflösung.

Der erste Knabe habe x und der zweyte y gehabt, so ist nach der 8ten Aufgabe:

$$y = \frac{(n + 1) a + (m + 1) b}{n - m}$$

In unsrer gegenwärtigen Aufgabe ist $a = b = 9$, $m = 1$, und $n = 7$; lassen wir a und n in der Formel stehen, und setzen nur für $m = 1$ einen Werth, so bekommen wir:

$$y = \frac{(n + 3) \cdot a}{n - 1},$$

für unsere Aufgabe ist daher

$$y = \frac{(7 + 3) \cdot 9}{7 - 1} \; 5 \cdot 3 = 15 \text{ rthlr.}$$

Aus

Aus der allgemeinen Formel für x in der 8ten Aufgabe folgt hier:

$x = \frac{(3n + 1)a}{n - 1}$, also für $a = 9$ und $n = 7$ ist

$$x = \frac{(3 \cdot 7 + 1) 9}{7 - 1} = 11 \cdot 3 = 33 \text{ rthlr.}$$

Probe. Der erste hat 33 rthlr., erhält er also von dem zweyten noch 9 rthlr., so hat er $33 + 9 = 42$ rthlr. $= 7 \cdot 6$ rthlr., und der andere, der nur 15 rthlr. hat, behält nur $15 - 9 = 6$ rthlr. Also hat jener wirklich um 7 mal so viel. Giebt aber der erste dem andern 9 rthlr., so bekommt der zweyte $15 + 9 = 24$ rthlr. und der erste behält $33 - 9 = 24$ rthlr., also hätten sie alsdann gleichviel, wie es seyn sollte.

Damit $n - 1$ positiv bleibe, so muß $n > 1$ seyn, folglich ist x immer größer als y und $x - y$ ist $=$

$$= \frac{(3n + 1)a}{n - 1} - \frac{(n + 3)a}{n - 1} = \frac{(3n + 1) - (n + 3)a}{n - 1}$$

$$= \frac{(2n - 2)a}{n - 1} = \frac{(n - 1) 2a}{n - 1} = 2a.$$

Weiß ich also y, so findet sich x wenn ich $2a$ addire; weiß ich aber x, so findet sich y wenn ich $2a$ subtrahire.

In unserer Aufgabe war $a = 9$ und $y = 15$, also findet sich $x = 15 + 2 \cdot 9 = 33$ wie vorhin.

Wäre $n = 2$ so wird $y = 5a$ und $x = 7a$.

Dieses sind allgemeine Formeln für solche Aufgaben als die 7te ist. Dort ist nemlich $a = 1$ und also $y = 5$ und $x = 7$.

Man ist demnach durch solche allgemeine Formeln in den Stand gesetzt, selbst eine Menge Aufgaben zu erfinden. Gesetzt in der 7ten Aufgabe, sollte sich ein jeder 7 Schaafe geben, und die übrigen Bedingungen sollten bleiben, so ist $y = 5 \cdot 7 = 35$ und $x = 7 \cdot 7 = 49$.

14te Aufgabe.

Es hat jemand 2 Stück Land, das eine Stück ist 8mal größer, als das andere, und zieht man die Ackerzahl des kleinern von der des größern ab, so ist der Unterschied 21 Acker. Wie groß ist ein jedes?

Auflösung:

Das erste das Größere sey x, und das andere y Acker groß, so ist:

$$x = 8y; \quad \text{und } x - y = 21$$

$$\text{folgl. } x = 21 + y.$$

$$\text{Daher } 8y = 21 + y$$
$$\text{und also } 7y = 21$$
$$\text{mithin } y = \tfrac{21}{7} = 3 \text{ Acker,}$$
$$\text{und also } x = 8 \cdot 3 = 24 \text{ Acker.}$$

Folgende Aufgabe ist der allgemeine Vortrag von dieser.

15te Aufgabe.

Aus der gegebenen Differenz, und dem Quotienten zweyer Zahlen die Zahlen selbst zu finden.

Auflösung:

Die beyden gesuchten Zahlen sollen seyn, x und y, die Differenz $= d$ und der Quotient $= q$; so ist

$$1)\ x - y = d, \quad \text{und } \frac{x}{y} = q$$
$$\text{daher } x = q \cdot y.$$

Diesen Werth von x in Null gesetzt; giebt

$$qy - y = d \text{ oder } (q - 1)\, y = d,$$
$$\text{folgl. } y = \frac{d}{q-1};$$
$$\text{mithin } x = q \cdot \frac{d}{q-1}.$$

In

In der vorhergehenden Aufgabe war $d = 21$; und $q = 8$, hiernach ist also $y = \frac{21}{8-1} = 3$, und $x = 8 . y = 8 . 3 = 24$ wie vorhin.

Regel. Die kleinste Zahl wird gefunden, wenn man die Differenz mit dem um Eins verminderten Quotienten dividirt.

Die größte Zahl wird gefunden:
Wenn die gefundene kleinere Zahl mit dem Quotienten multiplicirt wird.

Wollte ich aber die größte Zahl finden, ohne vorher die kleinere zu berechnen, so muß ich das Produkt aus dem Quotienten in der Differenz durch den um Eins verminderten Quotienten dividiren.

16te Aufgabe.

Aus der gegebenen Summe und dem Quotienten zweier Zahlen, die Zahlen selbst zu finden.

Auflösung:

Die Summe beyder Zahlen sey gleich S, der Quotient $= q$, und die beyden gesuchten Zahlen gleich, x und y, so ist: $x + y = S$ und $\frac{x}{y} = q$

also $x = q . y$.

Diesen Werth für x setzen wir in der Gleichung für S, so erhalten wir: $q y + y = S$

oder $(q + 1) y = S$

folglich $y = \frac{S}{q+1}$;

mithin $x = q . \frac{S}{q+1}$.

Regel.

Regel. Die kleinste Zahl zu finden:

Man dividire die Summe durch den um Eins vermehrten Quotienten.

Die größte Zahl zu finden, wenn die kleine bereits gefunden ist:

Man multiplicire die kleinere Zahl durch den Quotienten.

Die größte Zahl zu finden, ohne die kleinere vorher zu wissen:

Man dividire das Produkt des Quotienten in der Summe, durch den um Eins vermehrten Quotienten.

Z. B. $S = 21$; $y = 6$; so ist $= y = \frac{21}{6+1} = 3$, und $x = 6.\ 3 = \frac{6.\ 21}{6+1} = 18$.

17te Aufgabe.

Es sey die Summe zweyer Zahlen $= 8$, und die Differenz ihrer Quadrate $= 16$; was sind es für Zahlen?

Auflösung:

Erste Zahl $= x$; andere $= y$; so ist $x + y = 8$ und hieraus findet sich $x = 8 - y$. Es ist ferner $x^2 - y^2 = 16$, und also $x^2 = 16 + y^2$; vorhin war $x = 8 - y$, hier ist also $x^2 = 64 - 16y + y^2$;

mithin $64 - 16y + y^2 = 16 + y^2$

oder $64 - 16y = 16$

——————— mit 16 dividirt.

$4 - y = 1$

——————— + y addirt.

$4 = 1 + y$

——————— + 1 subtrah.

folgl. $3 = y$; mithin $x = 8 - y = 8 - 3 = 5$.

Probe.

Probe. $x + y = 5 + 3 = 8$, und $x^2 - y^2 = 5^2 - 3^2 = 16$.

Zweite Auflösung.

Es ist $x^2 - y^2 = 16$

oder $(x + y)(x - y) = 16$.

Nun war $x + y = 8$, setzen wir diesen Werth in die vorige Gleichung, so ist $8(x - y) = 16$.

Daher $x - y = 2$.

Also die Summe beyder Zahlen $= 8$ und die Differenz $= 2$, daher die größte Zahl $= \frac{8}{2} + \frac{2}{2} = 5$, und die kleinere $\frac{8}{2} - \frac{2}{2} = 3$.

Dritte Auflösung.

Man nenne die Differenz beyder Zahlen z; so ist die größte der gesuchten Zahlen $= 4 + \frac{z}{2}$, und die kleinste $= 4 - \frac{z}{2}$ daher die Differenz der Quadrate $= (4 + \frac{z}{2})2 - (4 - \frac{z}{2})2 = 16$; oder $8z = 16$ und daher $z = 2$; mithin die größte Zahl $= 4 + \frac{z}{2} = 5$ und die kleinste $= 4 - \frac{z}{2} = 3$.

18te Aufgabe.

Es sey die Summe zweyer Zahlen gleich s, und die Differenz ihrer Quadrate $= d$; man soll diese Zahl finden.

Auflösung:

Die größte Zahl sey x, und die kleinste y; so ist:

$x^2 - y^2 = d$

oder $(x + y)(x - y) = d$

aber $x + y$ ist gleich s

daher $s(x - y) = d$.

und $x - y = \frac{d}{s}$.

Da

Da nun die Summe und die Differenz beyder Zahlen bekannt ist, so kann man die Zahlen selbst sehr leicht finden.

Es ist nemlich $x = \frac{s}{d} + \frac{d}{2s}$, und $y = \frac{s}{2} - \frac{d}{2s}$

Probe. $x + y = (\frac{s}{2} + \frac{d}{2s}) + (\frac{s}{2} - \frac{d}{2s}) = s$,

und $x^2 - y^2 = (\frac{s}{2} + \frac{d}{2s})^2 - (\frac{s}{2} - \frac{d}{2s})^2 = d$.

In der vorhergehenden Aufgabe war $s = 8$, $d = 16$; also $x = \frac{8}{2} + \frac{16}{2 \cdot 8} = 5$, und $y = \frac{8}{2} - \frac{16}{2 \cdot 8} = 3$, wie vorhin.

Regel. Ich suche erst die Differenz beyder Zahlen, wie folget:

Man dividire die Differenz der Quadrate mit der Summe. Addire ich nun die halbe Differenz zur halben Summe, so erhalte ich die größte Zahl. Subtrahire ich die halbe Differenz von der halben Summe, so bekomme ich die kleinere Zahl.

19te Aufgabe.

Zwey Zahlen zu finden, daß, wenn man zum dritten Theile der größern die Hälfte der kleinern addirt, 8 kommen; und wenn man vom 5ten Theil der größern den 3ten Theil der kleinern subtrahirt, 1 komme.

Auflösung:

Große Zahl $= x$; kleine $= y$.

A, $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 8$; B, $\frac{x}{5} - \frac{y}{3} = 1$.

Man

Man multiplicire die Gleichung A mit 6, und die Gleichung B mit 10, so erhalten wir aus A:

$2x + 3y = 48$, und aus B erhalten wir,

$2x - \frac{10y}{3} = 10$ subtrahirt.

$3x + \frac{10y}{3} = 38;$

oder $19y = 3 \cdot 38$,

folgl. $y = \frac{3 \cdot 38}{19} = 3 \cdot 2 = 6$.

Da $2x + 3y = 48$

so ist $2x = 48 - 3y$,

und $x = 24 - \frac{3y}{2}$.

Da nun $y = 6$ ist

so ist $x = 24 - \frac{3 \cdot 6}{2} = 15$.

Probe. $\frac{15}{3} + \frac{6}{2} = 8$ und $\frac{15}{5} - \frac{6}{3} = 1$.

20ste Aufgabe.

Ein Knabe will Aepfel und Birnen kaufen; es kosten aber 10 Aepfel 2 gr., und 25 Birnen 4 gr. Wie viel muß er von jeder Gattung nehmen, daß es für 100 Stück gerade 19 gr. ausmacht?

Auflösung:

x Aepfel und y Birnen.

10 Aepfel kosten 2 gr., daher kosten x Aepfel $\frac{2 \cdot x}{10} = \frac{1}{5}x$ gr.

25 Birnen kosten 4 gr., also kosten y Birnen $\frac{4y}{25}$ gr.

Nun

Nun muß den Bedingungen der Aufgabe gemäß

$\frac{x}{5} + \frac{4y}{25} = 19.$

und $x + y = 100$, mult. wir die obere Gleich. mit 5,

so ist $x + \frac{4}{5}y = 95$, subtrah. von der untern Gleichung,

also $\frac{1}{5}y = 5$,

folgl. $y = 25$ Stück.

Da nun $x + y = 100$

so ist $x = 100 - y$

also hier $x = 100 - 25 = 75$ Stück.

Probe.

10 Aepfel kosten 2 gr.; also kosten 75 St. $\frac{75 \cdot 2}{10} = 15$ gr.
25 Birnen kosten 4 gr.; mith. kost. 25 – „ „ 4 gr.

Summa 100 St. kosten also 19 gr.

21ste Aufgabe.

Man dingt einen Arbeiter auf 30 Tage. Wenn er arbeitet, bekommt er 7 gr. Lohn, wenn er aber feyert, so werden ihm zur Strafe 5 gr. abgezogen. Da nun die 30 Tage verflossen waren, so fand sichs, daß er nichts zu fordern hatte; wie oft hat er gefeyert, und wie oft gearbeitet?

Auflösung:

y Feyertage, und x Arbeitstage.

Der Aufgabe gemäß ist $x + y = 30$,

in x Arbeitstagen hat er verdient $7x$ gr.

wegen y Feyertage ist ihm abgezogen $5y$ gr.

Laut der Bedingung ist $7x = 5y$.

folgl. $x = \frac{5 \cdot y}{7}$.

Die

Diesen Werth von x setzen wir in die ersten Gleichung, so kömmt

$$\frac{5 \cdot y}{7} + y = 30$$

oder $5y + 7y = 210$

oder $12y = 210$

folgl. $y = 17\frac{1}{2}$ Feyertage.

mithin $x = \frac{5 \cdot y}{7} = \frac{5 \cdot 17\frac{1}{2}}{7} = \frac{87\frac{1}{2}}{7} = 12\frac{1}{2}$ Arbeitstage.

Probe.

$12\frac{1}{2}$ Arbeitstage à 7 gr. Lohn, macht 3 rthlr. 15 gr. 6 pf.
$17\frac{1}{2}$ Feyertage à 5 gr. tägl. Abz., macht 3 rthlr. 15 gr. 6 pf.

22ste Aufgabe.

Man dingt einen Arbeiter c Tage, mit der Bedingung, wenn er arbeitet, bekommt er a gr. Lohn, wenn er aber feyert, so werden ihm zur Strafe b gr. abgezogen. Da nun die c Tage verflossen waren, so fand sichs daß er nichts zu fordern hatte; wie oft hat er gefeyert und wie oft gearbeitet?

Auflösung:

x Arbeitstage und y Feyertage.

Der Bedingung gemäß muß $x + y = c$ seyn.

Ferner muß der Arbeiter in x Arbeitstagen erhalten ax gr. und für y Feyertage, muß ihm abgezogen werden by gr.

Der Aufgabe gemäß muß $ax = by$ seyn,

oder $ax - by = 0$

da $x + y = c$, so ist auch $bx + by = bc$ } Beyde Gleichungen add.

giebt $ax + bx = bc$.

oder

oder $(a + b)\,x = bc$

folglich $x = \frac{bc}{a+b}$

Es war $ax = by$

mithin $\frac{ax}{b} = y$; daher auch $y = \frac{ac}{a+b}$

In der vorhergehenden Aufgabe war $a = 7$, $b = 5$ und $c = 30$.

Dieses giebt: $x = \frac{5 \cdot 30}{7+5} = 12\frac{1}{2}$ uud $y = \frac{7 \cdot 30}{7+5} = 17\frac{1}{2}$

Ohne alle Einkleidung würde diese Aufgabe also vorgetragen werden.

22ste Aufgabe.

Man soll eine Zahl c, in zwey Theile theilen, daß wenn ein Theil mit a, der andere mit b multiplicirt würde, gleiche Produkte entstehen.

Wären x und y die gesuchten Theile, so fänden wir wie bey der vorhergehenden Aufgabe:

$$x = \frac{bc}{a+b} \text{ und } y = \frac{ac}{a+b}$$

Auch hier findet eine Probe statt. Es muß nemlich laut der Aufgabe $a \cdot \frac{bc}{a+b} = b \cdot \frac{ac}{a+c}$ seyn,

ferner muß $\frac{ac}{a+b} + \frac{ac}{a+b} = \frac{(b+a)c}{a+} = c$ seyn.

Eine andere Auflösung dieser Aufgabe stehet im ersten Theil dieser Sammlung Seite 38.

Regel. Ein Theil wird gefunden:

Wenn man die zu theilende Zahl mit dem einen Faktor multiplicirt, und dieses Produkt mit der Summe der Faktoren dividirt.

23ste Aufgabe.

Zwey Kaufleute haben ein Capital von 11000 Thlr. zusammengelegt. Nach Verlauf von einiger Zeit haben beyde gleichviel gewonnen, und der Gewinnst des ersten ist 4mal so groß, als seine eingelegte Summe, der Gewinnst des zweyten aber 7mal so groß als seine eingelegte Summe. Wie viel hat jeder eingelegt?

Auflösung.

Ueberdenken wir die Aufgabe gehörig, so nehmen wir sogleich gewahr, daß das Capital 11000 Thlr. $= c$, dergestalt in zwey Theile getheilt werden muß, daß wenn der eine Theil mit $4 = a$, und der andere mit $7 = b$ multiplicirt wird, diese Produkte einander gleich werden.

Es ist also nach der vorhergehenden Aufgabe:

$x = \frac{bc}{a + b}$ und $y = \frac{ac}{a + b}$,

Für diesen Fall also $x = \frac{7 \cdot 11000}{4 + 7} = 7000$ Thlr.

und $y = \frac{A \cdot 11000}{4 + 7} = 4000$ Thlr.

Eine dergleichen Aufgabe stehet auch schon im ersten Theile dieser Sammlung Seite 37, dort ist $a = 3$, $b = 5$, $c = 1800$ also der eine Theil $= \frac{3 \cdot 1800}{3 + 5}$ und der andere $= \frac{5 \cdot 1800}{3 + 5}$. Auch die Aufgabe des ersten Theils Seite 38 gehört hierher.

24te Aufgabe.

Ein Meister hatte mit einem Gesellen den Contract geschlossen: daß er ihm für jeden Tag wo er arbeiten könnte, ausser der Kost noch 8 gr. geben wollte; für jeden Tag aber, wo er nicht arbeiten würde, 2 gr. für die Kost bezahlt haben wollte. Als der Meister nach Verlauf von 15 Tagen seinem Gesellen 3 Thlr. ausgezahlt hatte, so sagt dieser zu seinem Freunde, daß der Meister ihm 8 gr. zu wenig gegeben hätte, denn wenn er gleich nicht mehr wisse, wie viel Tage er eigentlich gearbeitet, so habe er doch immer von einem Tage zum andern in Gedanken behalten, wie viel ihm der Meister noch schuldig sey. Wie viel Tage hatte der Geselle gearbeitet?

Auflösung.

Der Geselle soll x Tage gearbeitet, und y Tage nicht gearbeitet haben. Er erhält also für x Tage die er gearbeitet, $8x$ gr.

Für y Tage die er nicht gearbeitet hat, werden ihm $2y$ gr. abgezogen.

Den Bedingungen der Aufgabe gemäß, haben wir folgende zwey Gleichungen:

$x + y = 15$ und $8x - 2y = 72$ gr. $+ 8$ gr. $= 80.$

folglich: $y = 15 - x$ oder $2y - 8x = - 80$

$2y = 8x - 80$

mithin $y = 4x - 40$

Da nun auch $y = 15 - x$

so ist: $4x - 40 = 15 - x$

und $5x = 55$

folglich: $x = 11$ Tage die er gearbeitet.

mithin $15 - x = 4$ Tage die er gefeyert.

Probe.

Probe. 11 Tage à 8 gr. Lohn beträgt 88 gr.
4 Tage à 2 gr. Abzug beträgt 8 gr.
Rest 80 gr.

So viel hätte der Meister ihm geben sollen, allein er gab ihm nur 72 Groschen, also 8 zu wenig.

25ste Aufgabe.

Es hat jemand zwey Becher sammt einem Deckel, der 18 Thlr. werth ist. Wird der Deckel auf den ersten Becher gesetzt, so ist er noch einmal so viel werth, als der andere; wird er aber auf den andern gesetzt, so ist er $\frac{1}{4}$ mehr werth als der erstere. Wie viel ist jeder werth?

Auflösung:

Der erste sey werth x, der andere y; wird der Deckel auf den ersten gesetzt, so ist er $x + 18$ werth, folglich $x + 18 = 2y$; wird er auf den andern gesetzt, so ist er werth $y + 18$, folglich $y + 18 = \frac{5x}{4}$

Also $x + 18 = 2y$

und $\frac{x}{2} + 9 = y$

Es ist aber $\frac{5}{4}x = y + 18$ die obere von der untern Gleichung abgezogen giebt: $\frac{3}{4}x - 9 = 18$

und $\frac{3}{4}x = 27$

folglich: $x = \frac{4.27}{3} = 4 . 9 = 36$

demnach $y = 9 + \frac{x}{2} = 9 + 18 = 27.$

Probe. $36 + 18 = 54 = 2 . 27.$

und $27 + 18 = 45 = 36 + \frac{36}{4}.$

26ste Aufgabe.

Zwey Städte liegen C Meilen weit von einander: davon gehen zwey Boten A und B zu gleicher Zeit gegen einander aus, und kommen in b Tagen

gen zusammen. Wenn nun B täglich a Meilen weiter gegangen als A, so frägt sichs, wie viele Meilen jeder täglich zurückgelegt habe?

Auflösung:

x = dem Weg des A und y = dem Weg des B, den ein jeder in b Tagen zurück gelegt hat.

Also ist hier $y + x = c$, die Summe zweyer Grössen $y - x$ = den Weg dem B in b Tagen mehr macht als A, da er täglich a Meilen weiter gegangen ist als A. Daher ist $y - x = ab$, gleich der Differenz zweyer Größen. Demnach ist:

$$y = \frac{c + ab}{2} \text{ und } x = \frac{c - ab}{2}$$

B hat täglich $\frac{y}{b} = \frac{c + ab}{2b}$ Meilen, und

A hat täglich $\frac{x}{b} = \frac{c - ab}{2b}$ Meilen zurückgelegt.

Im ersten Theile dieser Sammlung, Seite 95. Aufgabe 120.

Da ist $c = 100$, $b = 8$; $a = 1\frac{1}{2}$ Meile.

also $\frac{y}{b} = \frac{100 + 8 \cdot 1\frac{1}{2}}{2 \cdot 8} = \frac{100 + 12}{2 \cdot 8} = 7$ Meilen

und daher $\frac{x}{b} = 7 - 1\frac{1}{2} = 5\frac{1}{2}$ Meile.

Die gewönliche Auflösung dieser Aufgabe ist so, wie sie im ersten Theil Seite 95. Aufgabe 120. beschrieben ist. Die hier gegebene Auflösung hat den Vorzug vor jener, daß sie übersehen läßt, wie jemand ohne Anwendung der Algebra,

bra, mit Ueberzeugung diese Aufgabe auflösen würde. Er wird so schliessen: (man habe im ersten Theil die 120ste Aufgabe vor Augen) Beyder Boten Weg macht 100 Meilen, B aber macht offenbar $8 . 1\frac{1}{2} = 12$ mehr als A. Nun weiß er, daß die halbe Summe plus der halben Differenz die größere, und die halbe Summe minus der halben Differenz die kleinere Zahl giebt, also der Weg des $A = \frac{100}{2} - \frac{12}{2} = 44$ Meilen, und des $B \frac{100}{2} + \frac{12}{2} = 56$. A legt also täglich $\frac{44}{8} = 5\frac{1}{2}$ Meile, und B täglich $\frac{56}{8} = 7$ Meilen zurück.

27ste Aufgabe.

Zwey Wasserröhren haben ein Gefäß von a Eymer, mit Wasser angefüllt, indem die erste b Stunden, und die zweyte c Stunden geflossen ist. Ein andermal haben eben diese 2 Röhren ein Behältniß von d Eymer angefüllet, da die erste f, und die andere g Stunden geflossen ist. Wie viel Stunden werden beyde miteinander fliessen müssen, damit sie ein Behältniß von h Eymer anfüllen?

Auflösung.

Hier siehet man leicht ein, daß es nur auf die Menge Wasser ankömmt, so jede Röhre in einer Stunde giebt. Es sey darum die Menge Wasser, so die erste Röhre in einer Stunde giebt $= x$ Eymer, so giebt sie in b Stunden bx, und in f Stunden fx Eymer. Die Menge Wasser, so die zweyte Röhre in einer Stunde giebt, sey $= y$, so giebt sie in c Stunden cy, und in g Stunden gy Eymer. Es ist demnach:

$$\underline{bx + cy = a}, \text{ und } \underline{fx + gy = d}$$

daher $bgx + cgy = ag$ und $cfx + cgy = cd$

$$\begin{array}{lrcl} \text{von} & cfx + cgy & = & cd \\ \text{abgezogen} & bgx + cgy & = & ag \\ \hline \text{bleibt:} & (cf - bg)x & = & cd - ag \\ \hline \text{folglich} & x & = & \dfrac{cd - ag}{cf - bg} \end{array}$$

Da $bx + cy = a$

so ist $cy = a - bx$

und $y = \dfrac{a - bx}{c} = \dfrac{a - \left(\dfrac{bcd - abg}{cf - bg}\right)}{c} =$

$$= \frac{acf - bcd}{(cf - bg)} = \frac{af - d}{cf - bg}$$

Es sey $a = 21$ Eymer, $d = 51$ Eymer, $h = 100$ Eymer, $b = 2$ St., $c = 3$ St., $f = 7$ St. und $g = 6$ Stunden; also:

$$x = \frac{\cancel{3}.51 - \overset{7}{\cancel{21}}.6}{\cancel{3}.7 - 2.\cancel{6}2} = \frac{51 - 42}{7 - 4} = \frac{9}{3} = 3 \text{ Eymer}$$

$$y = \frac{a - bx}{c} = \frac{\overset{7}{\cancel{21}} - 2.\cancel{3}}{\cancel{3}} = 5 \text{ Eymer.}$$

Beyde Röhren geben also zusammen $3 + 5 = 8$ Eymer in einer Stunde; folglich brauchen sie um 100 Eymer zu füllen $\frac{100}{8} = 12\frac{1}{2}$ Stunde. Setzen wir $a = 22$, $d = 31$, $h = 100$. $b = 6$, $c = 4$, $f = 9$, $g = 7$, so ist $x = 5$ und $y = -2$, welches anzeigt, daß die eine Röhre jede St. 5 Eymer in das Gefäß schüttet, aus welchem durch die andere Röhre stündlich 2 Eymer fließen.

Ich habe hier nur für x und y Formeln gesucht, welche nur die Menge Wasser bestimmten, so jede Röhre in

in einer Stunde liefert. Nun kann man aber leicht angeben, in wie viel Stunden sie beyde h Eymer geben, nemlich in $\frac{h}{x+y}$ Stunden. Man könnte freylich für diesen Ausdruck auch sehr leicht die allgemeine Formel angeben, allein man gewinnt bey der Ausübung nichts, indem man auf vorhin gezeigte Art eben so geschwind das Verlangte findet.

28ste Aufgabe.

Es hat jemand 2 Sorten Wein; von der Sorte A kostet das Maaß a, und von der geringern Sorte B gilt das Maaß b. Er will beyde Sorten so vermischen, daß das Maaß von dem vermischten Weine für C, für einen Preis, der (wie es sich auch schon von selbst versteht,) zwischen a und b fällt, gegeben werden könne. Wie viel muß demnach von jeder Sorte genommen werden?

Auflösung:

Man setze, von der Sorte A werde zu 1 Maaße x, und von der Sorte B werde y genommen; so ist:

$$x + y = 1$$

Um die nachfolgende Gleichung zu finden, suche man, was x und y kosten.

Der Werth von x ist ax
Der Werth von y ist by.

Da nun der Theil x von 1 Maaße, ax, und der andere Theil von demselben, y, by gilt, so kostet das ganze Maaß vom vermischten Weine $ax + by$; und also

ist:

ist: $c = ax + by$. Es war $x + y = 1$, daher ist auch $b = bx + by$ subtrahirt.

giebt $c - b = (a - b)\,x$

folglich $\frac{c - b}{a - b} = x$

Da nun $x + y = 1$, so ist $y = 1 - x = 1 - \frac{c - b}{a - b} = \frac{a - b\,(c - b)}{a - b} = \frac{a - c}{a - b}$

Regel.

1) Subtrahire den mittlern Preis von dem höchsten;

2) den geringsten von dem mittlern; und

3) den geringsten von dem höchsten.

4) Die erste und zweyte Differenz dividire mit der dritten; der erste Quotient zeigt, wie viel von der geringen, und der zweyte Quotient, wie viel von der guten Sorte genommen werden müsse.

Z. B. $a = 24$ so ist $a - c = 6$ und also $\frac{a - c}{a - b} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

$c = 18$ $\quad c - b = 3$

$b = 15$ $\quad a - b = 9$ $\quad \frac{c - b}{a - b} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

Von der geringen Sorte muß also $\frac{2}{3}$ und von der guten $\frac{1}{3}$ genommen werden.

Nähme man statt des schlechten Weins, Wasser, so würde $b = 0$ und die Menge des Wassers oder $y = \frac{a - c}{a} = 1 - \frac{c}{a}$ und $x = \frac{c}{a}$, in unserm gegebenen Beyspiele wäre also alsdann $x = \frac{18}{24} = \frac{3}{4}$ und $y = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$.

Eine andere Auflösung dieser Aufgabe stehet im ersten Theile dieser Sammlung, Seite 53.

Es verhält sich $x : y = \frac{c-b}{a-b} : \frac{a-c}{a-b} = c - b : a - c$.

Auf dieses Verhältniß gründet sich folgende gemeine Regel, die man in Rechenbüchern meistens ohne Beweis findet.

Schreibe den bessern und schlechtern Preis untereinander, und den verlangten mitlern Preis zur Linken. Zur Rechten setze bey dem bessern Preis den Unterschied des schlechtern vom mitlern, und beym schlechten Preis den Unterschied des bessern vom mitlern; so zeigen diese Differenzen das Verhältniß der Theile an, welches man suchte.

Das Schema dieser Regel in Buchstaben zu zählen, wäre folgendes.

	a	c - b		24	3
c			18		
	b	a - c		15	6

also verhielte sich:

$x : y = c - b : a - c$ in Zahlen wie $3 : 6 = 1 : 2$

das heißt: auf $c - b$ Theile des guten Weins, muß man $a - c$ Theile des schlechten Weins in Zahlen nehmen, auf 1 Theil guten, muß man 2 Theile schlechten rechnen. Wenn aber dieses Verhältniß gefunden ist, so hat das übrige keine Schwierigkeit. Denn da man 1 Theil von dem guten und 2 Theile von dem schlechten nehmen soll, so erhält man überhaupt 3 Theile in der Mischung, also enthält 1 Maaß von dem gemischten Wein 3 Theile, nemlich $\frac{1}{3}$ guten und $\frac{2}{3}$ schlechten Wein.

All-

Allgemein. Da man zu der Mischung $c - b$ Theile des guten und $a - c$ des schlechten Weins nimmt, so enthält die Mischung überhaupt $(c - b) + (a - c) = (a - b)$ Theile. Theilt man daher das Ganze in $(a - b)$ Theile, so muß man $(c - b)$ solcher Theile vom guten, und $(a - c)$ solcher Theile vom schlechten Wein nehmen, dieses giebt wie vorhin $x = \frac{c - b}{a - b}$ und $y = \frac{a - c}{a - b}$

Daß eben diese Aufgabe auch auf andere zu vermischende Dinge angewandt werden könne, wird man leicht einsehen. Als gut und geringer Silber zu mischen, wobey aber zu merken, daß das Silber nach der Mark oder 16 Loth geschätzt werde, das, wo in 16 Lothen, 13 Loth Silber und 3 Loth Kupfer ist, wird 13 löthig Silber genannt. Das unter das Silber gemischte Kupfer aber wird angesehen, als hätte es keinen Werth. Eine hieher gehörige Aufgabe wäre folgende.

29ste Aufgabe.

Man soll 15 löthiges und 9 löthiges Silber so vermischen, daß 13 löthiges herauskomme.

Auflösung:

Wir wollen diese Aufgabe allgemein auflösen. Es sey daher a löthiges und b löthiges Silber so zu vermischen, daß c löthiges herauskomme.

Man bedenke nun, daß a, b, und c, nicht Zahlen von Lothen, sondern Sechszehntheile bedeuten, wenn die Mark, wie hier geschehen muß, = 1 gesetzt wird. Man nehme also von einer Mark a löthiges Silber x und von einer Mark b löthiges Silber y. Die Theile x und y müssen zusammengenommen eine Mark c löthiges Silber geben, also: $x + y = 1$ der $x$te Theil einer Mark

a löthiges Silber, enthält $\frac{ax}{16}$ Mark fein Silver, und der yte Theil enthält $\frac{by}{16}$ Mark fein Silber, und nun muß wiederum $\frac{ax}{16} + \frac{by}{16} = \frac{c}{16}$ Mark fein Silber betragen, oder $ax + by = c$. Nun siehet ein jeder, daß hier $x = \frac{c-b}{a-b}$, und $y = \frac{a-c}{a-b}$ seyn muß, wie in der vorhergehenden Aufgabe.

Es ist also verstattet, von diesen Brüchen nur die Zähler hinzuschreiben, weil der allein gemeinschaftliche Nenner sich in der Rechnung aufhebt; dies muß aber erinnert werden, wenn man die Rechnung verständlich und Anfängern belehrend vortragen will.

Diese Erinnerung ist von vielen Rechnern nicht geschehen, und doch haben sie ihren Rechenbüchern, durch hie und da angebrachte Buchstabenrechnungen ein mathematisches Ansehen geben wollen. Ihr Vortrag aber aber zeigt deutlich, daß sie solche nur abgeschrieben, aber selbst nicht verstanden haben.

Die Rechnung in Zahlen steht so:

			gegen einander verkleinert.
13	15	4	2
	9	2	1
			Zusammen 3 Theile.

Also $\frac{2}{3}$ Mark 15 löthiges und $\frac{1}{3}$ Mark 9 löthiges.

Probe. $\frac{2}{3}$ einer Mark 15 löthiges, enthält $\frac{2}{3} \cdot \frac{15}{16} = \frac{10}{16}$ einer Mark fein Silber, und $\frac{1}{3}$ einer Mark 9 löthiges, enthält $\frac{1}{3} \cdot \frac{9}{16} = \frac{3}{16}$ einer Mark fein Silber, also ($\frac{2}{3} + \frac{1}{3}$) einer Mark enthalten zusammen $= \frac{10}{16} + \frac{3}{16} = \frac{13}{16}$ fein Silber, d. h. geben

zu-

zusammen 13 löthiges Silber. Dieses wird die regula alligationis genannt, und beym Münzwesen und Silberarbeiten mit Nutzen gebraucht. Siehe Schlüters Unterricht von Hüttenwerken im Probierbuche 33 Cap.

Hieher gehöret auch Archimedes Kronenprobe des Sicilianischen Königs Hiero. Der König Hiero in Syrakus hatte einem Goldarbeiter 18 ℔. reines Gold gegeben, um ihm eine Krone daraus zu verfertigen. Da sie fertig war, entstand bey ihm der Verdacht, daß sie mit Silber versetzt, oder Silber inwendig in ihr versteckt seyn möchte. Archimedes, ein Verwandter des Königs, bekam den Auftrag es zu untersuchen, doch ohne das schöngerathene Werk der Kunst durchs Feilen noch sonst zu beschädigen. Die Aufgabe machte ihn so lange verlegen, bis er einmal ins Bad ging, und betrachtete, wie mit dem Einsenken seines Körpers das Wasser in dem Behälter in die Höhe stieg. Ich habe es gefunden! rief er aus, und vergaß sich, wie die Geschichte sagt, so sehr in seiner Freude darüber, daß er nackend über die Gasse nach Hause eilte, um auf folgenden Wege die Sache auszuforschen.

Er ließ sich 18 ℔. reines Gold und 18 ℔. reines Silber reichen. Jenes versenkte er in ein Gefäß voll Wasser, von welchem nun, als er das Gold einsenkte, eine gewisse Masse durch eine zu dem Ende gemachte Oefnung, abfloß. Als er das Silber hineinsenkte, floß natürlich das Wasser ab, welches dem Raume gleich wog, den das Silber mehr, als vorhin das Gold einnahm. Dieß Wasser wog er ab. Als er die Krone hineinsenkte, floß natürlich nicht eben so viel Wasser ab; denn die Krone war nicht ganz Silber. Aber es floß doch mehr Wasser ab, als welches bey Einsenkung der 18 ℔. reines Gold abfloß. Als er aber durchs

Wägen fand, daß es ein Dritteil des vorher abgewogenen Wassers war, schloß er mit Recht, die Krone enthalte einen Dritteil ihres Gewichts, oder 6 ℔. an Silber. Denn wenn der Unterschied des Raums zwischen 18 ℔. Gold, und eben so vielem Silber eine Masse Wasser, die für so viel Cöllnische ℔. ungefähr 91½ Quentgen gewesen seyn würde, wirklich gab, so konnte der Unterschied des Raums von 6 ℔. Silber, die in der Krone waren, und 6 ℔. Gold, die in ihr seyn sollten, ein Drittel dieser Masse, nemlich 30½ Quentgen geben. Dieses erzählt Vitruvius B. 9. C. 3.

Man siehet jedoch leicht ein, daß bey diesem Abwägen des abfliessenden Wassers große Unrichtigkeiten statt haben mußten. Archimedes selbst gerieth nachher auf die jetzt bekannte bessere Methode, die ein kleines Schriftchen von ihm darstellt. Von Archimedes hat man zwey Bücher, deren Titel in der lateinischen Uebersetzung de insidentibus humido heißt. Archimedis Opera per Isaac. Barrow, Lond. 1767; p. 245. Grichisch hat sie David Rivaltus a Flurantia herausgegeben, Paris 1615. Sie betreffen schwimmende Körper.

Archimedes fand also, daß ein Körper im Wasser gerade um so viel weniger wiegt, als das Wasser an Gewicht beträgt, welches er aus der Stelle treibt; nun aber nehmen 18 ℔ Gold weniger Raum ein, als 18 ℔ Silber, und 18 ℔ von einer Masse, welche aus Gold und Silber bestehet, muß demnach offenbar mehr Raum, als 18 ℔ Gold, und weniger, als 18 ℔ reines Silber einnehmen. 18 ℔ Gold verliehren also im Wasser an ihrem Gewicht weniger, als 18 ℔ Masse von Gold und Silber, und diese weniger, als 18 ℔ reines Silber, die hieher gehörige allgemeine Aufgabe wäre daher folgende.

30ste Aufgabe.

Aus dem gegebenen Gewichte eines aus zweyerley Metallen zusammengeschmolzenen Klumpens, und wie viel solcher am Gewicht im Wasser verliehrt, desgleichen wie viel ein jedes von gleichem Gewicht vor sich, ungemischt im Wasser verliehrt, zu finden, wie viel von jedem in dem Klumpen sey?

Auflösung:

Die beyden zusammengeschmolzenen Metalle mögen A und B heißen.

Das Gewicht des zusammengeschmolzenen Klumpens sey p.

In diesem Klumpen sey von den Metall A, x und von B, y enthalten

also ist: $x + y = p$

Von A, verliehren p ℔. in Wasser a

Von B, verliehren p ℔. in Wasser b

Die aus beyden Theilen $x + y = p$ bestehende Masse verliehrt im Wasser c.

Wie viel nun x von A, und y von B in Wasser jedes einzeln verliehrt, erfahren wir durch folgende Proportion.

$$p : x = a : \frac{ax}{p} = \text{dem Verlust für } x$$

$$p : y = b : \frac{b'y}{p} = \text{dem Verlust für } y$$

mithin verliehren beyde zusammen in Wasser.

$$\frac{ax}{p} + \frac{by}{p} \text{ dieses muß demnach} = c \text{ seyn.}$$

Da

Daher $ax + by = pc$, und da $x + y = p$, so ist auch $ax + ay = ap$

subtrahirt.

bleibt: $(b - a)\,y = (c - a)\,p$

folglich $y = \frac{c - a}{b - a} \cdot p$

mithin $x = p - y = p - \frac{c - d}{b - a} \cdot p = \left(1 - \frac{c - a}{b - a}\right) p = \frac{b - c}{b - a} \cdot p.$

Die Krone des Königs zu Syrakus, wog 18 ℔. $= p$ und verlohr in Wasser $\frac{5}{4}$ ℔. $= c$; 18 ℔. Gold verliehren 1 ℔; $= a$ und 18 ℔. Silber verliehren $=$ $\frac{7}{4}$ ℔. $= b$.

Also $x = \frac{\frac{7}{4} - \frac{5}{4}}{\frac{7}{4} - 1} \cdot 18 = \frac{\frac{2}{4}}{\frac{3}{4}} \cdot 18 = 12$ ℔. Gold.

und $y = \frac{\frac{5}{4} - 1}{\frac{7}{4} - 1} \cdot 18 = \frac{\frac{1}{4} \cdot 18}{\frac{3}{4}} = 6$ ℔. Silber.

Die Zahlen, welche ich hier für a, b, und c angenommen habe, weichen von der Wahrheit etwas ab. Die Richtigkeit dieser Rechnung beruht nemlich auf der Voraussetzung, daß das Volumen der Mischung, gleich der Voluminum der gemischten Körper sey. Diese Voraussetzung findet aber bey zusammengeschmolzenen Metallen, wie die Erfahrnng lehrt, nicht statt. Siehe Kästners Anfangsgründe der angewandten Mathematik. Göttingen, 1792. 1 Abtheilung. Seite 152. §. 54 u. s. w.

Daraus würde also folgen, daß wenn auch a und b und c und p hier richtig angegeben wären, so würde doch x und y nicht ganz genau zu bestimmen seyn. Aber immer giebt dieses Verfahren etwas der Wahrheit nahe kommendes, welches wol in der Ausübung dürfte gebraucht werden.

Noch

Noch ein Beyspiel in Zahlen.

31ste Aufgabe.

37 ℔. Zinn verlieren im Wasser 5 ℔.; und 23 ℔. Bley verlieren im Wasser 2 ℔.; ferner eine Mischung aus Zinn und Bley von 120 ℔.; verliert in Wasser 14 ℔. Wie viel Zinn und Bley ist in dieser Mischung gewesen?

Auflösung.

Da 37 ℔. Zinn 5 ℔. verlieren, so verliert 1 ℔. Zinn $\frac{5}{37} = a$ und 1 ℔. Bley verliert $\frac{2}{23} = b$ und ferner 1 ℔. der gemischten Masse verliert $\frac{14}{120} = c$, und $120 = p$.

Ich bestimme nemlich a, b, c, für Massen von gleichem Gewichte.

Daher ist $x = \frac{b-c}{b-a} \cdot p = \frac{\frac{2}{23} - \frac{14}{120}}{\frac{2}{23} - \frac{5}{37}} \cdot 120 =$

$\frac{2 \cdot 120 - 14 \cdot 23}{2 \cdot 37 - 5 \cdot 23} \cdot 37 = \frac{-82}{-41} \cdot 37 = 74$ ℔. Zinn und demnach $y = 120 - 74 = 46$ ℔. Bley.

Dieses Exempel stehet auch in Herrn Hofrath Kästners oben angeführten Anfangsg. der angew. Math. Erste Abth. Seite 249. II. Ich mußte hier anders rechnen, als Herr Kästner, Anfängern dienen beyde Methoden zu vergleichen, zu einer guten Uebung.

In des verewigten Karstens Anfangsgründen der Mathematik. Greifswalde 1780 2ter Band in der Hydostratik, Seite 195. stehet auch die Aufgabe von der Krone, sie wird 20 ℔. schwer angegeben und auch a, b, c, sind ein wenig von der unsrigen verschieden. — Karsten rechnet diese Aufgabe nach der Alligationsrech-

nung, und hiernach stehet sie auch in des Herrn Prof. Huths Anfangsgründen der angewandten Mathematik. Halle, 1789. Seite 146.

Auch unsere 31ste Aufgabe stehet in Karstens Lehrbegrif der Mathematik. Greifswalde, zweyte Auflage 1790. 3ter Theil, Seite 278, nach der Alligationsrechnung gerechnet – ich kann nicht sagen, daß ich diese Rechnung vortheilhaft finde. Kurz vorher Seite 277 rechnet er wie Kästner.

Mussenbrök Introd. ad Phil. Natur. §. 1401. giebt ebenfalls das Exempel der Krone 20 ℔. schwer. Die Verbesserung die seine Rechnung bedarf, findet man bey Karsten Seite 274. In Wolfs Anfgr. der Mathematik. Halle 1750. 2ter Theil Seite 859, wird die Krone 18 ℔. oder die dort für a, b, c, angenommenen Verhältnisse geben, unser $x = 12$ und $y = 6$, also gerade das Umgekehrte von unsern Werthen.

Daß Archimedes den Grund zur Hydrostatik gelegt haben mag, kann wahr seyn, wenn auch gleich die Erzählung der Kronenprobe ein Märchen seyn mag.

Die Aufgabe 28 und folgende sind nur die leichtesten Fälle der Alligationsrechnung. Allgemeiner gehören Vermischungsrechnungen zu unbestimmten Aufgaben, die erst von mir in der Folge beygebracht werden. Siehe Kästners Fortsetzung der Rechenkunst Kapitel XI.

32ste Aufgabe.

Es werden zwey Zahlen verlanget. Wenn man man die eine um 9 vergrössert, so wird sie doppelt so groß, als die andere; und wenn man die zweyte um 3 vergrössert, so wird sie doppelt so groß, als die erste.

Auf-

Auflösung:

Es seyen die verlangten Zahlen x und y, so bekömmt man diese beyden Gleichungen:

$$x + 9 = 2y$$
und $$y + 3 = 2x$$

geben addirt $x + y + 12 = 2(x + y)$, also $12 = x + y$
und geben subt. $x - y + 6 = 2(y - x)$
oder $x - y + 6 = -2(x - y)$
also $6 = -3(x - y)$
und $-2 = x - y$
also $x = \frac{12}{2} + \frac{-2}{2} = 5$, und $y = \frac{12}{2} - (\frac{-2}{2}) = 7$

Andere gewöhnliche Auflösungen findet man in des Professors Burja selbstlehrenden Algebristen. Berlin, 1786. 2ter Theil, Seite 4.

33ste Aufgabe.

Es werden zwey Zahlen verlanget: das Vierfache der ersten, mit dem Fünffachen der zweyten machet 23. Das Siebenfache der ersten mit dem Zweyfachen der andern, macht 20.

Auflösung:

Die zwey verlangten Zahlen seyen x und y, so ist der Aufgabe gemäß:

$4x + 5y = 23$, daher $8x + 10y = 46$
$7x + 2y = 20$, daher $35x + 10y = 100$

Die obere Gleichung von der untern abgezogen } giebt: $27x = 54$
folgl. $x = \frac{54}{27} = 2$

Da $7x + 2y = 20$
so ist $2y = 20 - 7x$
mithin $y = 10 - \frac{7x}{2}$, daher $y = 10 - \frac{7 \cdot 2}{2} = 3$

34ste Auf-

34ste Aufgabe.

Es werden zwey Zahlen x, y verlangt: das Sechsfache der ersten, mit dem Fünffachen der zweyten beträgt 97. Das Vierfache der ersten mit dem Zehnfachen der zweyten macht 138.

Auflösung:

Es ist also $6x + 5y = 97$

$4x + 10y = 3$, die obere Gleichung mit 2 multiplicirt.

giebt: $12x + 10y = 194$

die obere Gleichung subt.

kömmt $8x = 56$

folgl. $x = 7$.

und da $4x + 10y = 138$, so ist $10y = 138 - 4x$

folglich $y = \frac{138 - 4x}{10} = 11$.

Wollte man x auf ähnliche Art wegschaffen, als man vorhin y wegschafte, so darf man nur mit dem Coefficienten von x aus beyder Gleichung, diese Gleichung wechselweis multipliciren. Haben aber diese Coefficienten einen gemeinschaftlichen Faktor, so kann man sie vorher damit verkleinern, und gebraucht blos die Quotienten.

Es war nemlich hier:

$$6x + 5y = 97$$
$$4x + 10y = 138$$

Die Coefficienten 6 und 4, lassen sich durch 2 verkleinern, und man erhält die Zahlen 3, 2.

Man multiplicire daher die obere Gleichung mit 2, und die untere mit 3, und ziehe die obere von der untern ab:

also $12x + 10y = 194$

und $12x + 30y = 414$

$$20y = 220$$

folgl. $y = 11$ wie vorhin.

35ste Auf-

35ste Aufgabe.

In einem Laboratorium giebt es zweyerley Brandröhrensätze, von welchen man weiß, daß wenn von zwey gleichen Brandröhren, die eine von dem ersten und die andere von dem zweyten Satze angefüllt wird, jener 30 Momente, dieser aber nur 20 Momente lang brennt. Wenn nun die Menge des ersten Satzes 3 ℔. die Menge des zweyten aber, nur 2 ℔. ist, und diese beyden Sätze untereinander gemischt werden: so frägt sichs, wie viel Momente alsdann die Vermischung, in einer gleichgroßen Brandröhre brennen werde.

Auflösung:

Wir wollen diese Aufgabe sogleich allgemein auflösen. Man setze daher die Menge, die sowol von jedem der angegebenen zwey Sätze, als auch die Menge von der Vermischung zur Anfüllung einer Brandröhre erfordert wird $= p$ ℔. (nach den Principien der Artillerie ist p ein Bruch), die gesuchte Anzahl der Momente, so die Vermischung brennen wird $= x$; ferner $30 = a$, $20 = b$, $3 = c$, und $2 = d$.

Da nun p ℔. von dem ersten Satze a Momente brennen; so werden c ℔. desselben, wenn solche nach und nach in die erwähnte Brandröhre gefüllet würden, $\frac{a.c}{p}$ Momente brennen. Folglich beyde unvermischt nach und nach eingefüllt, eine Zeit von $\frac{ac+bd}{p}$ Momente aushalten, dieses sey $= y$.

Ferner

Ferner da p ℔. von der Vermischung x Momente brennen: so müssen (c + d) ℔., $\frac{(c + d)\,x}{p} = y$ Momente brennen, folglich:

$$\frac{ac + bd}{p} = \frac{(c + d)\,x}{p}$$

mithin $\frac{ac + bd}{c + d} = x$

Für unsere bestimmten Zahlen, finden wir also:

$$x = \frac{30.3 + 20.2}{3 + 2} = \frac{\overset{6}{\cancel{30}}.3 + \overset{4}{\cancel{20}}.2}{\cancel{5}} = 26 \text{ Momente}$$

Auch diese Aufgabe gehört zur Alligationsrechnung.

Man siehet auch leicht, daß y gar nicht nöthig ist einzuführen, und alles mit x abgethan werden kann; auch ist es Anfängern bemerkenswerth, daß hier, das zu Anfang der Rechnung eingeführte p, zuletzt ganz aus der Rechnung verschwindet, ohngefähr wie oben bey der Vermischung des a und b löthigen Silbers in der 29 Aufgabe die Nenner 16 aus der Rechnung wegfielen.

36ste Aufgabe.

Ein Ingenieur fragte einen Werbeofficier, der zwey Rekrouten angeworben hatte: Wie viel er jedem Handgeld gegeben hätte? Dieser gab zur Antwort: Der eine ist einige Zoll größer, als der andere; wenn ich nun dem Kleinern 30 Thlr. mehr gegeben hätte, so hätte er $\frac{2}{7}$ von dem Handgelde des Größern mehr, als der Größere bekommen; hätte ich aber dem Größern 30 Thlr. mehr gegeben, so hätte er noch einmal so viel, als der Kleinere bekommen. Die Frage ist: Wie viel hat jeder Handgeld bekommen?

Auflösung.

Man setze das Handgeld des Kleinern = x und das Handgeld des Größern = y; so hat man folgende Gleichungen:

$x + 30 = y + \frac{2}{5} y$, nach der ersten Bedingung der Aufgabe

und $\frac{y + 30}{2} = x$, nach der zweyten Bedingung der Aufgabe,

setzen wir diesen Werth für x in die ersten Gleichung, so ist: $\frac{y}{2} + 15 + 30 = y + \frac{2}{5} y$

mit 2.5 = 10 mulipl.

giebt $5y + 450 = 10y + 4y$

5 y subtrahirt.

bleibt: $450 = 9y$

folglich $\frac{450}{9} = 50$ Thlr.

und $x = \frac{y}{2} + 15 = \frac{50}{2} + 15 = 40$ Thlr.

37ste Aufgabe.

Es ist die Geschwindigkeit zweyer Körper A und B, die sich nach einer Gegend bewegen, und ihre Entfernung von einander gegeben, hiernach soll man bestimmen, wenn eher der geschwindere Körper, den langsamern einholet.

Auflösung:

Ehe wir zur Auflösung schreiten, wollen wir bemerken, daß, wenn Geschwindigkeiten als bekannt gegeben werden, solches so viel heisse: es sey bekannt welchen Raum ein jeder Körper in einerley Zeit durchlaufe. Denn wenn die Zeiten gleich sind, so verhalten sich die Geschwindigkeiten, wie die durchlaufenen Räume, das ist: wenn ein Körper in einer Minute 2mal, 3mal, u. s. w. so weit kommt, als ein anderer in gleicher

cher Zeit, so ist auch seine Geschwindigkeit 2mal, 3mal u. s. w. so groß, als die Schnelligkeit des andern.

A gehe geschwinder als B, ihre Geschwindigkeit verhalte sich wie a : b, das heißt: wenn der Körper A, den Raum a durchläuft, so durchläuft in eben der Zeit B den Raum b,

Ihre Entfernung von einander sey c, in Zeittheilen gegeben, (das heißt, in Secunden, Minuten, Stunden oder Tagen u. s. w.)

Oder ihre Entfernung von einander sey d, in Längenmaaß gegeben, (das heist, in Fußen oder Meilen u. s. w.)

Der Raum den A zu durchlaufen hat, ehe er B einholt sey $= y$.

Der Raum, den B noch zu durchlaufen hat, ehe er eingeholt wird, sey $= x$.

Da nun der Körper A den Raum y in eben der Zeit durchlaufen muß, in der B den Raum x durchläuft, so ist:

$$a : b = y : x.$$

folglich $ax = by$

aber y ist gleich $c + x$,

Setzen wir diesen Werth für y in die obige Gleichung, so erhalten wir:

$$ax = bc + bx$$

b x subtrahirt.

bleibt $(a - b)\,x = bc$

folglich , , $x = \frac{b\ c}{a - b}$

Mit der Geschwindigkeit b, legt man in der Zeit c den Raum bc zurück, dieser Raum muß aber $= d$, gleich der Entfernung beyder Körper seyn, daher ist auch:

$$x = \frac{d}{a - b}$$

Aus der ersten Gleichung für x folgt folgende Proportion $a - b : b = c : x$, das ist, wie sich die Differenz der Geschwindigkeiten zur kleinern Geschwindigkeit verhält, so verhält sich die Entfernung zu dem gesuchten Raume.

38ste Aufgabe.

Ein Bothe A macht täglich 6, ein anderer B, 4 Meilen, A gehet aber 3 Tage später aus, als B. Wenn holt A, B ein?

Hier wäre also aus der vorhergehenden Aufgabe $a = 6$, $b = 4$, $c = 3$,

folglich $(6-4) : 4 = 3 : x$, also $x = 6$ Tagen; d wäre hier $= 3 \cdot 4 = 12$ Meilen.

39ste Aufgabe.

Anno 1758 Johannis, den 24 Junii, um Mittag, stehet die Sonne im vierten Zeichen 2°, 44′, der Mond im 11 Zeichen 15°, 39′. Der Mond läuft in einer Minute 32″, 56‴; die Sonne 2″, 28‴; hiernach soll man die Zeit der Zusammenkunft des Mondes und der Sonne bestimmen.

Auflösung:

Hier ist $a + 32'' \cdot 65''' = 1976'''$
und $b = 2'' \cdot 28''' = 148'''$

d oder die Entfernung des Mondes von der Sonne bestimmen wir so:

Ein Zeichen hält 30°, und 12 Zeichen giebt, es hier nur, da nun der Mond schon 15°, 39′ vom 11ten Zeichen zurückgelegt hat, so stehet er nur vom Ende der 12 Zeichen nur noch um 2 Zeichen − (15°, 39′) = 1 Zeichen 14°, 21′.

Die

Die Sonne ist aber auf der andern Seite der 12 Zeichen, von diesem Zeichen

	3 Z. 2°, 44′	entfernt
also:	1 Z. 14° 21′	
also:	3 Z. 2° 44′	addirt.

Beyder Entfernung von einander $= 4$ Z. $18° \; 5' = 29826000''' = d$

folglich $x = \frac{29826000}{1976 - 148} = 16326$ Minuten $=$ 11 Tagen, 7 Stunden, 56 Minuten. Doch lehrt die Astronomie, daß noch einige Ungleichheiten mit berechnet werden müssen.

40ste Aufgabe.

Ein Bothe B, gehet täglich b Meilen, nach c Tagen wird ihm ein anderer Bothe A nachgeschickt, mit dem Befehl, den B in x Tagen einzuholen. Wie viel Meilen muß also A täglich machen?

Auflösung:

A macht täglich a Meilen nach der 37sten Aufgabe $x = \frac{bc}{a-b}$. Da nun hier b, c und x als bekannt, a aber als unbekannt angesehen wird, so müssen wir a zu entwickeln suchen, dieses geschiehet indem wir auf beyden Seiten mit a - b multipliciren, und erhalten:

$$ax - bx = bc$$

$$ax = b\,(c + x)$$

folglich $$a = \frac{b\,(c + x)}{x}$$

oder $x : (c + x) = b : a$ das ist:

Wie sich die Tage des Einholens zur Summe der später abgeschickten und der Tage des Einholens

holens verhält, so verhält sich die Tagereise des ersten Bothens zur gesuchten Tagereise des nachgeschickten Bothens.

Wäre alles übrige bekannt, nur c nicht, so findet sich aus der Formel $c = \frac{(a - b)\,x}{b}$

Diese Formel löst folgende Aufgabe auf.

41ste Aufgabe.

Ein Bothe A, der täglich a Meilen macht, holt einen andern Bothen B, der täglich b Meilen macht in x Tagen ein. Wie viel Tage war B schon voraus?

Auflösung:

Aus der Formel $c = \frac{(a - b)\,x}{b}$, folgt

$b : a - b = x : c$, das ist:

Wie sich die Tagereise des B zu der Differenz der Tagereise beyder Bothen verhält, so verhalten sich auch die Tage des Einholens zur gesuchten.

Sucht man aus der Formel b zu entwickeln, so findet man $b = \frac{ax}{c+x}$ dieses giebt folgende Aufgabe.

42ste Aufgabe.

Hinter einen Bothen B wird nach c Tagen ein anderer Bothe A der täglich a Meilen geht, geschickt, mit den Befehl, B in x Tagen einzuholen. Wie viel Meilen macht täglich der Bothe B?

Auflösung:

Aus der Formel $b = \frac{ax}{c-x}$, folgt.

$c + x : x = a : b$, das ist:

Die

Wie die Summe der später abgeschickten und der Tage des Einholens, zu den Tagen des Einholens sich verhält, so die Tagereise des nachgeschickten Bothen, zur gesuchten.

Die 40, 41 und 42ste Aufgabe sind alle aus der 37sten Aufgabe abgeleitet worden. Dieses ist also ein Vortheil, den die allgemeine Auflösung einer Aufgabe gewährt, so daß, wenn man die unbekannte Größe als bekannt, und eine von den bekannten als unbekannt ansiehet, hierdurch sich die Aufgabe in eine ganz andere verwandelt.

Noch mögen einige Beispiele folgen.

43ste Aufgabe.

Ein fliegend Corps A, welches täglich a = 5 Meilen zurücklegt, holt eine feindliche Truppe B, die d = 18 Meilen entfernt ist, in $x = 6$ Tagen ein. Wie viel Meilen macht der feindliche Trupp täglich.

Auflösung:

Nach der 37sten Aufgabe ist $x = \frac{d}{a - b}$

also $ax - bx = d$

oder $-ax + bx = -d$

und also $bx = ax - d$

folglich $b = \frac{ax - d}{x}$

Wir müssen nemlich b die Tagereise des feindlichen Trupps suchen,

mithin $b = \frac{5 \cdot 6 - 18}{6} = 5 - 3 = 2$ Meilen täglich.

44ste Auf-

44ste Aufgabe.

Um welche Zeit wird den Stundenzeiger B, der Minutenzeiger A, zwischen 7 und 8 Uhr decken?

Auflösung:

Wenn B auf 7 Uhr zeiget, so zeiget A auf 12 Uhr, folglich hat B, $d = 7$ Stunden voraus. B hat eine Geschwindigkeit $b - 1$, A aber $a = 12$ (weil B eine Stunde, und A, 12 Stunden in gleicher Zeit durchläuft) demnach ist nach der 37sten Aufgabe $x = \frac{d}{a - b} = \frac{7}{12 - 1} = \frac{7}{11}$ Stunde oder beynahe 38 M. 11 S. über 7 Uhr.

45ste Aufgabe.

Ein Körper von K Kubikfuß wiegt q ℔. Er bestehet aus zweyerley Materien: von der schweren wiegt ein Kubikfuß s ℔., und von der leichtern wiegt ein Kubikfuß l ℔., wie viel enthält der Körper von jeder Materie?

Auflösung:

Von der schweren enthalte er x und von der leichtern y Kubikfuß,

x Kubikfuß zu s ℔., machen $s \,.\, x$ ℔.
y Kubikfuß zu l ℔., machen $l \,.\, y$ ℔.

Zusammen $(.y + s \,.\, x)$ ℔.

Also $l \,.\, y + s \,.\, x = p$; es ist aber $y + x = k$,
mithin auch $l y + l x = l k$
subtrahiert.
bleibt $(s - l)\, x = p - l \,.\, k$
folglich $x = \frac{p - l \,.\, k}{s - l}$

Re-

Regel. Vom ganzen Gewichte (p) des Körpers ziehe man das Gewichte ab, welches er haben würde, wenn er ganz aus der leichtern Materie bestünde (l.k). Das übrige theile man durch den Unterschied der Gewichte eines Kubikfußes von jeder Materie (s - l).

Auch selbst wer ohne algebraische Schlüsse diese Aufgabe auflösen wollte, müßte durch sein Raisonnement auf diese Regel verfallen. Denn wenn ich vom ganzen Gewichte des Körpers dasjenige abziehe, was er wiegen würde, wenn er ganz aus der leichtern Materie bestünde, so zeiget der Rest den Ueberschuß des Gewichts an, welches aus der schweren Materie entstehet. Theile ich nun diesen Rest durch den Ueberschuß des Gewichts jedes Kubikfußes, nemlich durch den Unterschied der Gewichte, so erfahre ich, wie vielmal dieser Ueberschuß eines Kubikfußes im ganzen Ueberschusse enthalten ist, und folglich wie viel Kubikfuß von der schwerern Materie vorhanden seyn müssen.

Will man nun auch y, das ist die Anzahl der Kubikfüsse der leichtern Materie algebraisch bestimmen, so ist sie

$$y = k - x = k - \frac{p - lk}{s - l}$$

$$= \frac{ks - kl - p + lk}{s - l}$$

folglich $$y = \frac{ks - p}{s - l}$$

Regel. Vom Gewichte (ks), welches der Körper haben würde, wenn er ganz aus der schweren Materie bestünde, wird das Gewicht (p), was er wirklich hat, abgezogen, und der Rest wird

wird wie vorher durch den Unterschied der Gewichte dividirt.

Diese Regel findet sich auch wie vorher, ohne algebraische Schlüsse.

Beyde Regeln lassen sich bequem in eine Regel fassen:

Wenn ein Körper aus zweyerley Materien bestehet, und man will wissen, wie viel von der einen darinn ist, so berechnet man erstlich, was er wiegen würde, wenn er bloß aus der einen Materie bestünde. Man nimmt den positiven Unterschied dieses und des wirklichen Gewichts. Dieser Unterschied wird durch den Unterschied der relativen Schwere dividirt.

Als Beyspiel mag folgende Aufgabe dienen.

46ste Aufgabe.

Ein Körper aus Bley und Zinn zusammengeschmolzen, wieget $2917\frac{3}{5}$ ℔., und seine Grösse beträgt 5 Kubikfuß. Wie viel ist darinnen Bley und Zinn?

Auflösung.

Man nimmt als bekannt an, daß ein Pariser Kubikfuß Bley $795\frac{1}{5}$ Pariser ℔. ein Kubickfuß Zinn hingegen $442\frac{2}{5}$ ℔. wieget.

Hier ist $p = 2917\frac{3}{5}$; $k = 5$; $s = 795\frac{1}{5}$; $l = 442\frac{2}{5}$

$$\text{also } x = \frac{2917\frac{3}{5} - 5 \cdot 442\frac{2}{5}}{795\frac{1}{5} - 442\frac{2}{5}} = \frac{705\frac{3}{5}}{352\frac{4}{5}} = 2.$$

Also sind im gegebenen Körper 2 Kubikfuß Bley, und $5 - 2 = 3$ Kubikfuß Zinn.

Pro-

Probe.

2 Kubikfuß Bley, zu $795\frac{1}{5}$ ℔. machen $1590\frac{2}{5}$ ℔. Bley.
3 Kubikfuß Zinn, zu $442\frac{2}{5}$ ℔. machen $1327\frac{1}{5}$ ℔. Zinn.
Zusammen $2917\frac{3}{5}$ ℔. Metall.

Wenn in der 45sten Aufgabe k = 1 gesetzt wird, so erhalten wir:

$x = \frac{p-1}{s-1}$; und $y = \frac{s-p}{s-1}$; und $x : y = (p-1) : (s-p)$

Das bisherige findet seine Anwendung in der Statik, wo ich aber nochmals wieder erinnern muß, daß beym Zusammenschmelzen der Metalle, dieselben gemeiniglich eine etwas andere Dichtigkeit erhalten, als vermöge der Rechnung geschehen sollte, so daß die Rechnung das verlangte Verhältniß nicht vollkommen genau angiebt. Dieses ist überhaupt ein Umstand, der sich allemal ereignet, wenn die abstrakten Regeln auf Gegenstände der Natur oder Kunst angewandt werden sollen. Denn es finden sich dabey viele Nebendinge, welche die berechneten Quantitäten entweder vergrößern oder verkleinern, und welche nicht bestimmt genug sind, um sie in Anschlag zu bringen, und in der Rechnung mit einzuführen.

47ste Aufgabe.

Drey Arbeiter verdienen zusammen 120 Tagelohne, der erste bekömmt täglich 20 Gr., der zweyte 24 Gr., der dritte 30 Gr.; es erhält aber einer so viel, als der andere. Wie viel Tage hat ein jeder gearbeitet?

Auflösung:

Antwort der erste x Tage, der zweyte y Tage, der dritte $(120 - x - y)$ Tage.

Man

Man rechne aus, wie viel Groschen ein jeder in den bestimmten Tagen erhalten habe. Die gefundenen Resultate sind sich deswegen gleich, weil einer so viel als der andere bekommen soll.

Der erste erhält in x Tagen . $20 . x$. Groschen.
Der zweyte erhält in y Tagen . $24 . y$. Groschen.
Der dritte erhält in $(120 - x - y)$ Tagen . . $(3600 - 30x - 30y)$ Gr.

Da wir zwey unbekannte Größen eingeführt haben, so müssen wir auch zwey Gleichungen aus den Bedingungen der Aufgabe machen.

$20x = 24y$; $20x = 3600 - 30x - 30y$
folglich $x = \frac{6}{5} y$; $50x = 3600 - 30y$
mithin $x = 72 - \frac{3}{5} y$

Es ist daher: $\frac{6}{5} y = 72 \frac{3}{5} y$
also $\frac{9}{5} y = 72$
folglich $y = 40$ Tage
$x = \frac{6}{5} y = 48$ Tage.
Der Dritte $120 - 48 - 40 = 32$ Tage.

48ste Aufgabe.

Zwey Malter Rocken und acht Malter Weizen kosten zusammen 64 Thlr. Drey Malter Rocken und 6 Malter Weizen kosten nach demselben Preise 54 Thlr. Wie viel kostet 1 Malter von jedem?

Auflösung:

1 Malter Rocken kostet x, 1 Malter Weizen y Thlr. Laut der Aufgabe ist:

$2x + 8y = 64$; $3x + 6y = 54$
also $x + 4y = 32$; und $x + 2y = 18$
da $x + 2y = 18$
——————— subtrahirt.
$2y = 14$
folglich $y = 7$ Thlr. und also $x = 18 - 2y = 4$ Thlr.

Pro-

Probe. 2 Malter Rocken à 4 Thlr. = 8 Thlr.
8 Malter Weizen à 7 Thlr. = 56 Thlr.
Summa 64 Thlr.

3 Malter Rocken à 4 Thlr. = 12 Thlr.
6 Malter Weizen à 7 Thlr. = 42 Thlr.
Summa 54 Thlr.

49ste Aufgabe.

Von einem Orte, der a Meilen vorwärts liegt, geht ein Bothe A, der m Meilen in 12 Stunden macht, h Stunden früher aus, als der Bothe B, der ihm nachgeschickt wird, und p Meilen in q Stunden machen muß, um A in x Stunden zu erreichen.

Auflösung.

Die Zeit für B, sey x und für A, y Stunden. Demnach hat man $n : m = y : \frac{my}{n}$ den Weg für A; und $q : p = x : \frac{px}{q}$ den Weg für B. Nun hat A, a Meilen voraus, also beträgt sein ganzer Weg $\frac{my}{n} + a$; derselbe Weg muß aber von B in der Zeit x zurückgelegt werden. Demnach muß seyn.

$$\frac{px}{q} = \frac{my}{n} + a; \text{ Ferner ist } h + x = y,$$

$$\text{daher } \frac{mh + mx}{n} = \frac{m}{n} y$$

subtrahirt.

$$\text{bleibt } \frac{(np - mq)x}{nq} - \frac{mh}{n} = a$$

(np

$$\frac{(np - mq)\,x}{nq} = a + \frac{mh}{n}$$

folglich $x = \frac{anq + hmq}{np - mq} = \frac{(an + hm)\,q}{np - mq}$

Z. B. A und B gehen von einem Orte aus, jener q Stunden früher. A macht 2, B aber 3 Meilen in der Stunde. Demnach ist hier $a = 1$, $h = 9$, $m = 2$, $n = 1$, $p = 3$, und $q = 1$;

folglich $x = \frac{(1.1 + 9.2).1}{1.3 - 2.1} = 18$ Stunden

$$y = h + x = h + \frac{(an + hm)}{np - mq} = \frac{(ph + aq)\,n}{np - mq}$$

Der ganze Weg für A $= \frac{m}{n}y + a = \frac{m(ph + aq)}{np - mq} + a$

$$= \frac{(mh + an)\,p}{np - mq}$$

Der Weg für B $= \frac{px}{q} = \frac{(an + hm)\,p}{np - mq}$

Also kommt für den ganzen Weg gerechnet nur $\frac{n}{m}y$, so ist die dazu gehörige Formel diese $\frac{m\,(ph + aq)}{np - mq}$

Giebt die Auflösung einer Aufgabe die unbekannte Größe negativ: so muß man sie in einem entgegengesetzten Sinne nehmen; oder will man die Größen, die in der Aufgabe vorkommmen, in einem entgegengesetzten Sinne nehmen: so muß man sie negativ ansetzen. Folgende Aufgabe mag es erläutern.

50ste Auf-

50ste Aufgabe.

A reiset von Mainz aus, und macht 3 Meilen in einer Stunde; B reiset von Rom 6 Stunden früher aus, und macht 2 Meilen in einer Stunde. Wenn werden sie einander begegnen, da Mainz und Rom 100 Meilen von einander liegen?

Auflösung:

Nach der vorhergehenden Aufgabe ist also hier a = 100, p = 2, q = n = 1, h = − 6, nemlich negativ, weil vorher A zuerst ausging, hier aber B zuerst ausgehet. Auch ist m = − 3, weil vorher A sich von B entfernte, hier aber dem B entgegen kömmt. Die gesuchte Zeit x für B ist nun positiv. Hätte ich aber h und m positiv für A gesetzt, so würde ich x und p negativ für B haben. Aber q und n bleiben beyde positiv, weil die Zeit während der Reise vorher und hier auf einerley Art verfließt.

Die allgemeine Formel verwandelt sich also für diesen Fall wie folget.

$$x = \frac{(mh + na)\, q}{np + mq} = \text{ also in Zahlen}$$

$$\frac{(3 \cdot x \cdot 6 + 1 \cdot x \cdot 100) \cdot}{1 \cdot 2 + 3 \cdot 1} = \frac{118}{5} = 23\tfrac{3}{5} \text{ d. i.}$$

B wird in $23\frac{3}{5}$ Stunden nach seiner Abreise von Rom dem A begegnen. Ich habe nemlich die allgemeine Formel für x hier gleich so eingerichtet, daß man nur nöthig hat die Zahlen für die Buchstaben zu setzen, ohne auf ihre Zeichen zu sehen. Jetzt will ich den Weg für B eben

eben so berechnen. Die Formel ist hiezu nach der gehörigen Verwandlung: $\frac{p\,(an + mh)}{np + qm}$, also in Zahlen

$\frac{2.(100.1 + 3.6)}{5} = \frac{236}{5} = 47\frac{1}{5}$, daher für A, $52\frac{4}{5}$ Meil.

Hievon überzeugt man sich auch durch die unmittelbare Berechnung. Denn wenn y die Zeit für B ist, bis er A begegnet: so macht B, in dieser Zeit 2y Meilen. A reiset (y − 6) Stunden, und macht also in dieser Zeit 3 (y − 6) = (3y − 18) Meilen.

Daher ist: $2y + 3y - 18 = 100$
oder $5y = 118$
daher . $y = \frac{118}{5} = 23\frac{3}{5}$, und der Weg, den er zurücklegt $= 2y = 2 . 23\frac{3}{5} = 47\frac{1}{5}$ Meilen, wie vorhin.

Noch eine dergleichen Aufgabe zur Uebung.

51te Aufgabe.

Ein Bothe A geht des Abends um 8 Uhr von Ryssel nach Paris ab, und legt alle Stunden 4 Meilen zurück. Ein anderer B geht eben denselben Tag Vormittag um 11 Uhr von Paris nach Ryssel ab, und legt alle Stunden 3 Meilen zurück. Man fragt, wie weit sie von Paris einander begegnen?

Auflösung:

Wenn man das, was hier gesagt wird, mit dem, was in der 49sten allgemeinen Aufgabe gesagt worden, vergleicht, so siehet man sogleich, daß der Buchstabe m, welcher den Weg des A in einer gegebenen Zeit ausdrücke, hier negativ

gativ seyn muß, weil man in der allgemeinen Auflösung voraussetzte, daß der Bothe A sich von dem andern B entfernte, in diesem Falle aber der erste dem andern entgegen kömmt. Hiernach siehet man auch, daß der Buchstabe h, welcher die Anzahl der Stunden ausdrückte, die der erste Bothe A voraus hatte, auch negativ seyn muß, weil er später abgegangen ist.

Man darf nur in der allgemeinen Formel, die wir für den Weg des B gefunden haben $= \frac{(mh + an)\,p}{np - mq}$ setzen $h = -9$; $m = -4$; $n = 1$; $p = 3$; $q = 1$; Paris ist von Ryssel 50 Meilen $= a$, so bekömmt man den Weg für B =

$$= \frac{(-4 \cdot -9 + 50 \cdot 1) \cdot 3}{1 \cdot 3 - (-4 \cdot 1)} = \frac{86 \cdot 3}{7} = \frac{258}{7} = 36\tfrac{6}{7};$$

woraus man sieht, daß die von Paris und Ryssel abgegangenen Bothen einander angetroffen, nachdem jener $36\frac{6}{7}$ Meilen zurückgelegt hat.

Noch ein paar dergleichen.

52ste Aufgabe.

A ist Montags Abends um 9 Uhr von Orleans aus, nach Spanien abgereiset, und legt in 3 Stunden 7 Meilen zurück. Ein andrer Bothe B wird dem ersten Dienstags Vormittags um 11 Uhr von Paris, dessen Entfernung von Orleans wir 34 Meilen setzen wollen, nachgeschickt, dieser macht in 4 Stunden 13 Meilen. Frage: wo sie einander angetroffen haben?

Auflösung:

Diese Frage aufzulösen, muß man den Unterschied zwischen 9 Uhr Abends und 11 Uhr Vormittags nehmen, welcher 14 Stunden beträgt.

Es ist also hier: $a = 34$; $h = 14$; $m = 7$; $n = 3$; $p = 13$; $q = 4$, also der Weg für B $=$

$$\frac{(7 \cdot 14 + 34 \cdot 3) \cdot 13}{3 \cdot 13 - 7 \cdot 4} = 236\tfrac{4}{11}$$

53ste Aufgabe.

A und B gehen von einerley Orte aus, A geht 9 Stunden früher aus, als B und macht 5 Meilen in 2 Stunden, B macht 11 Meilen in 3 Stunden. Wie weit von dem Orte, wo sie beyde ausgegangen sind, wird B den A einholen?

Auflösung:

Hier ist: $a = 0$; $h = 9$; $m = 5$; $n = 2$; $p = 11$; $q = 2$

also der Weg des B $= \dfrac{11 \cdot (2 \cdot 0 + 5 \cdot 9)}{2 \cdot 11 - 5 \cdot 3} = \dfrac{495}{7} = 70\tfrac{5}{7}$.

Siehe im ersten Theil dieser Sammlung. Seite 97. Aufgabe 123.

Aus den bisherigen Aufgaben siehet man genugsam, wie man allgemeine Formeln für jeden angegebenen besondern Fall brauchen soll. Auch kann man sich aus ihr andere allgemeine Formeln für besondere Fälle ableiten. Z. B. für die jetzige 53ste Aufgabe, wäre die allgemeine Formel, für den Weg den B macht $\dfrac{phm}{np - mq}$; denn a ist Null; und so für andere Fälle, die ich Anfängern zur Uebung überlassen will.

Hieher gehört auch folgende Aufgabe.

54ste Aufgabe.

Ein Haase hat 780 Sprünge voraus; der Hund, der ihn verfolgt, thut 4 Sprünge, wenn der Haase 3 thut, und 7 Haasensprünge betragen 5 Hundssprünge. Wie viel Sprünge hat der Haase noch zu thun, bis ihn der Hund einholt?

Auflösung:

Man suche die Geschwindigkeit des Haasens und des Hundes mit einander zu vergleichen.

Diese Vergleichung geschiehet folgendergestalt: der Hund legt mit 5 Sprüngen so viel Raum zurück, als der Haase mit 7. In dieser Bedeutung gleichen 5 Hundssprünge 7 Haasensprüngen; oder: 1 Hundssprung $= \frac{7}{5}$ Haasensprüngen. Nun thut der Hund 4 Sprünge in der Zeit, wo der Haase 3 thut; der Hund legt also einen Raum von $4 \cdot \frac{7}{5}$ Haasensprüngen in der Zeit zurück, in welcher der Haase einen Raum von 3 seiner Sprünge zurücklegt. Also verhalten sich die Geschwindigkeiten des Hundes und des Haasens $= 4 \cdot \frac{7}{5} : 3$. Der Haase ist also der langsamere.

Der Haase habe nun noch x Sprünge zu thun, ehe er eingeholt wird, so ist nach der in der 37sten Aufgabe gegebenen Regel: $4 \cdot \frac{7}{5} - 3 : 3 = 780 : x$,

$$\text{also } x = \frac{780 \cdot 3}{\frac{28}{5} - 3} = \frac{\overset{60}{\cancel{780}} \cdot 3 \cdot 5}{1\cancel{3}} = 900,$$

so viel Sprünge hat der Haase noch zu thun.

55ste Aufgabe.

Ich bin in einer zahlreichen Gesellschaft gewesen, sagt jemand, in der dreymal so viel Män-

ner als Damen waren; und da vier Männer mit ihren Frauen weggiengen, blieben noch viermal so viel Männer als Damen zurück. Wie stark ist die Anzahl von jedem Geschlecht gewesen?

Auflösung:

Hier ist sowol die Anzahl der Männer als der Damen unbekannt. Man setze also x sey die Anzahl der erstern, und y die Anzahl der zweyten.

Weil nun 4 Männer und 4 Frauen weggegangen sind, so ist $(x - 4)$ die Anzahl der zurückgebliebenen Männer, und $(y - 4)$ die Anzahl der zurückgebliebenen Damen. Im Anfange waren aber dreymal so viel Männer als Damen da.

Es ist also $x = 3y$ vermöge der ersten Bedingung.

Ferner ist nach der zweyten:

$$x - 4 = 4(y - 4)$$

$$x = 3y$$

subtrahirt.

$$-4 = y - 16$$

$+16$ addirt.

folglich: $12 = y$, und also $x = 3y = 36$

Es sind also überhaupt 36 Männer und 12 Damen in der Gesellschaft gewesen.

Probe. In der That ist in diesem Falle die Anzahl der Männer dreymal so groß, als der Damen, und wenn 4 weggehen, so bleiben von der erstern Anzahl 32 und von der zweyten 8 übrig, folglich viermal so viel Männer als Damen.

Zweyte Auflösung:

Diese Aufgabe läßt sich auch mit einer unbekannten Größe auflösen. Es sey y die Anzahl der Damen, so ist

ist 3y die Anzahl der Männer. Weil nun 4 Männer und 4 Damen weggehen, so bleiben (y - 4) Damen, und (3y - 4) Männer. Nun soll aber die Anzahl der zurückgebliebenen Männer 4mal so groß seyn, als die Anzahl der zurückgebliebenen Damen, folglich muß $4y - 16 = 3y - 4$, mithin $y = 12$ wie vorhin.

Diese Aufgabe läßt sich noch auf unendliche Art verändern; und wenn man sie genau untersucht, so wird man leicht gewahr, daß sie nur ein besonderer Fall von folgender weit allgemeinern ist.

56ste Aufgabe.

Man verlangt zwey Zahlen, deren Verhältniß gegeneinander, dem Verhältniß $m : n$ gleich ist. Sie sollen ferner so beschaffen seyn, daß, wenn man von jeder, die Zahl a wegnimmt, das Verhältniß der von beyden übrigbleibenden Zahlen, dem Verhältniß $p : q$ gleich ist.

Auflösung:

Man nenne die beyden Zahlen, welche man sucht, x und y; wenn man nun von jeder die Zahl a wegnimmt, so bleiben $(x - a)$ und $(y - a)$ übrig.

Nach den Bedingungen der Aufgabe ist nunmehro:

1) $x : y = m : n$
2) $(x - a) : (y - a) = p : q$

Aus No. 1 folgt: $y : x - y = n : m - n$
und aus No. 2. $x - y : y - a = p - q : q$

Daher $y : y - a = n(p - q) : q(m - n)$

mithin $q(m - n)y = yn(p - q) - an(p - q)$
also $an(p - q) = y[n(p - q) - q(m - n)]$

folg-

folglich $\frac{an(p-q)}{n(p-q)-q(m-n(} = \frac{an(p-q)}{np-mq} = y$

Aus No. 1 folgt $x = \frac{my}{n}$, daher $x = \frac{ma(p-q);}{np-mq}$

Gesetzt, das Verhältniß m : n ist dem Verhältniß 5 : 8, und p : q dem Verhältniß 7 : 12 gleich, so muß man in der Formel für m die Zahl 5, und für n, p, q, die Zahlen 8, 7, 12 setzen, alsdann wird, wenn a = 4

$$x = \frac{5 \cdot 4(7-12)}{7 \cdot 8 - 5 \cdot 12} = \frac{-20 \cdot 5}{-4} = 25$$

und $x = \frac{8 \cdot 4(7-12)}{7 \cdot 8 - 5 \cdot 12} = \frac{-32 \cdot 5}{-4} = 40$

Und es ist: $x : y = 25 : 40 = 5 : 8$

und $x - 4 : y\ 4 = 21 : 36 = 7 : 12$

also die Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

Anmerk. Es kann zuweilen geschehen, daß die verlangten Zahlen x und y negativ werden; z. B. es sey a = 6 m : n = 2 : 5, und p : q = 4 : 7. Setzt man nun in beyden Formeln diese Zahlen für die Buchstaben, so wird $x = \frac{2 \cdot 6(4-7)}{4 \cdot 5 - 2 \cdot 7} = \frac{-2 \cdot 6 \cdot 3}{-14-20} = \frac{-36}{+6} = -6$, und $y = \frac{5 \cdot 6(4-7)}{20-14} = \frac{-5 \cdot 6 \cdot 3}{+6} = -15$.

Diese Zahlen erfüllen die Bedingungen der Aufgabe eben so gut; denn es ist:

$-6 : -15 = 2 : 5$

und $-6-(+6) : -15-(+6) = 4 : 7$ oder $-12 : -21 = 4 : 7$.

Sollte

Sollte aber der negative Werth derselben einige Schwierigkeit verursachen, und man darüber einiges Bedenken tragen, weil man in der Aufgabe positive Zahlen gesucht hat; so bedenke man, daß in diesem Falle x und y nicht negativ werden können, als wenn p — q negativ und np — mq positiv; oder wenn p — q positiv und np — mq, wie im vorigen Exempel negativ ist. Im ersten Falle, wenn p — q negativ und np — mq positiv ist, so wird p — q = — 1 (q — p) und q — p ist eine positive Größe, und man kann x und y so schreiben.

$$x = \frac{-1 . am (q - p)}{mq - np}; \text{ und } y = \frac{-1 . an (q - p)}{mq - np}$$

Ist aber p — q positiv, und np — mq eine negative Größe, so wird mq — np eine positive Größe, und es ist np — mq = — 1 . (mq — np); zugleich kann man die vorige Größe so schreiben:

$$x = \frac{am (p - q)}{-1 . (mq - np)}; \; y = \frac{an (p - q)}{-1 . (mq - np)}, \text{ oder}$$

$$x = \frac{-1 . an (p - q)}{mp - np}; \; y = \frac{-1 . an (p - q)}{mq - np}.$$

Wenn man nun die Zahlen q, p, n, m positiv annimmt, und man will x und y auch positiv haben, so wird die Zahl a negativ genommen werden müssen. Oder man muß die Subtraktion, welche in der Aufgabe verlangt wird, in eine Addition verwandeln. Denn wenn a negativ genommen wird, so ist:

$$x = \frac{-1 . - am (p - q)}{mq - np} = \frac{+ am (p - q)}{mq - np}$$

$$y = \frac{-1 . - an (p - q}{mq - np} = \frac{+ an (p - q)}{mq - np}$$

Wenn

Wenn man hier wieder $m : n = 2 : 5$ und $p : q = 4 : 7$ nimmt, so werden die Zahlen, welche vorhin negativ waren, positiv; nemlich: $x = 6$ und $y = 15$. Dergleichen Fälle ereignen sich öfters und entspringen daher, weil die Algebra eigentlich die Subtraktion und Addition nicht von einander unterscheidet. Indessen zeigt ein geringes Nachdenken, wie man sich dabey verhalten muß.

57ste Aufgabe.

Ich habe zwey Kugelhaufen gesetzt, sagt ein Kanonier, wenn ich von dem ersten 100 weggenommen und zum zweyten gelegt hätte, so wären in diesem letztern dreymal so viel gewesen, als in dem ersten. Hätte ich aber 100 von dem zweyten genommen und zum ersten gelegt, so wären in beyden Haufen gleich viel gewesen. Man verlangt die Anzahl der Kugeln in jedem Haufen zu wissen.

Auflösung:

Man nenne die Anzahl der Kugeln im ersten Haufen x, und y die Anzahl im zweyten Haufen. Wenn nun von dem ersten 100 weggenommen werden, so bleiben darinn noch $x - 100$. Setzt man nun diese 100 zu der Anzahl im zweyten Haufen, so wird die ganze Anzahl $q + 100$ seyn. Nimmt man aber von dem zweyten Haufen 100 und setzt dieselben zum ersten, so kommen hierein $x + 100$ und im zweyten Haufen bleiben $y - 100$. Die in der Aufgabe vorgetragene erste Bedingung ist also:

$3(x - 100) = y + 100$, und nach der zweyten

$x + 100 = y - 100$

————————————— subtrah.

bleibt: $1x - 400 = 200$

also

also $2x = 600$

folglich: $x = 300$ und daher $y = 500$

Diese Zahlen erfüllen alle Bedingungen der Aufgabe, welche nur ein besonderer Fall von einer weit allgemeinern ist, die so vorgetragen werden kann.

58ste Aufgabe.

Es werden zwey Zahlen verlangt, die so beschaffen sind, daß wenn man von der ersten die Zahl a wegnimmt und zur zweyten hinzusetzt, das Verhältniß der dadurch entstehenden Zahlen dem Verhältnisse p : q gleich ist. Nimmt man aber von der zweyten die Zahl a weg und setzt sie zur ersten hinzu, so soll das Verhältniß der dadurch entstehenden Zahlen dem Verhältnisse n : m gleich seyn.

Auflösung:

Es sey x die erste, y die zweyte der gesuchten Zahlen. Nach den Bedingungen soll also seyn:

$$1)\quad x - a : y + a = p : q$$
$$2)\quad y - a : x + a = n : m$$

Aus No. 1 folgt: $x + y : y + a = p + q : q$,

und aus No 2

folgt: $x + a : y + x = m : n + m$

und No. 2 ist $y - a : x + a = n : m$ diese 3 Proportionen zusammengesetzt geben $\Big\}$ $y - a : y + a = n(p + q) : q(n + m)$,

ferner:

A $2y : 2a = n(p + q) + q(n + m) : q(n + m) - n(p + q)$

folgl. $y = \dfrac{a[n(p + q) + q(n + m)]}{q(n + m) - n(p + q)}$

Dem

Dem Anfänger sey es zur Uebung überlassen, den Werth für x zu suchen, darum will ich hier blos das Resultat mittheilen:

$$x = \frac{a[m(p+q)+p(m+n)]}{mq - np}$$

Um dieses durch ein Exempel zu erläutern, setze man $a = 3$; $m = 6$; $n = 7$; $p = 4$, $q = 9$, so wird $p + q = 4 + 9 = 13$, und $m + n = 13$. Ferner: $mq = 54$, und $np = 28$ folglich $mq - np = 26 = 2 . 13$. Also:

$$y = \frac{3.(7.13+9.13)}{2.13} = \frac{3(7+9)}{2} = 24, \text{ und}$$

$$x = \frac{3.(6.13+4.13)}{2.3} + \frac{3.(6+4)}{2} = 15.$$

Bey A. habe ich eine Schlußart gebraucht, die ich hier rechtfertigen will. Wenn nemlich $a : b = c : d$ so soll auch $a + b : b - a = c + d : d - c$ seyn. Hiervon kann man sich nun leicht überzeugen, wenn man das Produkt der beyden äussern und der beyden mittlern Glieder macht, und nachsieht, ob diese Produkte gleich sind. Nun ist das Produkt der beyden äussern Glieder $= ad + bc + db - ac = db - ac$, weil $(ad = bc)$; das Produkt der beyden mittlern Glieder ist $= bc - ad + db - ac = db - ac$, und also die Proportion allerdings richtig.

Die hier gegebene Auflösung zeigt deutlich, was eigentlich algebraische Auflösungen sind, nemlich eine Kette von Schlüssen, oder ein auf richtige Grundsätze gegründetes Raisonnement.

59ste Aufgabe.

Es befindet sich in zwo Festungen eine unbekannte Anzahl Geschütz; nur so viel weiß man, daß wenn aus der ersten in die andere 15 Stück abgegeben werden, die letztere doppelt so viel und noch 17 mehr, als die erste habe. Führt man aber aus der andern in die erste 12 Stück, so hat die erste um zwey mehr, als die andere. Man verlangt zu wissen, wie viel Stück sich in jeder Festung befinden.

Auflösung:

Es sey die Anzahl des Geschützes in der ersten Festung: . . . . $= x$
und in der zweyten Festung: . . . . $= y$

Giebt man nun aus der ersten 15 Stück in die andere, so bleiben in der ersten $x - 15$, und in der andern sind alsdann $y + 15$, wir erhalten aus der ersten Bedingung folgende Gleichung:

$$2\,(x - 15) + 17 = y + 15$$

Nimmt man aber aus der zweyten Festung 12 Stück, und giebt solche in die erste, so bleiben in der zweyten $y - 12$ und in der ersten sind alsdann $x + 12$.

Die zweyte Bedingung der Aufgabe giebt uns die zweyte Gleichung:

$$x + 12 - 2 = y - 12.$$

Ziehen wir diese Gleichung von der ersten ab, so bekommen wir:

$$x - 23 = 27$$

folglich $x = 50$

aus der zweyten Gleichung folgt $y = x + 22$, also $y = 72$.

Probe. $72 + 15 = 2 \cdot (50 - 15) + 17 = 87$
und $72 - 12 = 50 + 12 - 2 = 60$

60ste Aufgabe.

Es befinden sich auf einer Batterie zweyerley Stückkugeln, deren eigentlicher Kaliber unbekannt ist, nur weiß man, daß 10 vom stärkern und 23 von schwächern Kaliber zusammen 654 ℔. ausmachen; ferner daß 16 vom stärkern und 34 vom schwächern wiederum 996 ℔. am Gewicht betragen. Man verlangt das Gewicht von jedem Kaliber zu wissen.

Auflösung.

Es sey das Gewicht der schweren Kugeln $= x$
— der leichtern Kugeln . . $= y$

Die erste Bedingung giebt folgende Gleichung:

$10x + 23y = 654$, aus der zweyten Bedingung folgt diese $16x + 34y = 996$, die obere Gleichung von der untern abgezogen, giebt $6x + 11y = 342$, diese wiederum von der obersten abgezogen } giebt: $4x + 12y = 312$ diese mit 4 dividirt.

giebt $x + 3y = 78$ mit 10 multipl.

kommt $10x + 30y = 780$ von dieser Gleichung die oberste abgezogen, giebt $7y = 126$, $y = \frac{126}{7} = 18$, und da $x + 3y = 78$, so ist $x = 78 - 3y = 78 - 3 \cdot 18 = 24$.

Ich bin hier einen ganz besondern Weg gegangen, um auf eine leichte und bequeme Art die unbekannten Größen zu finden. Er verdient alle Aufmerksamkeit - Regeln dazu sind überflüßig, da man dieses am besten durch Uebung lernt.

61ste Auf-

61ste Aufgabe.

Ein Ueberläufer, den man über die Stärke eines Detaschements, das ein gewisses Dorf besetzt hat, und über die Zahl der Häuser dieses Dorfs vernimmt, antwortet: daß er keines von beyden angeben könne, nur so viel sey ihm bekannt, daß man bey Ankunft des Detaschements 8 Mann in jedes Haus quartiren wollen, hierbey wären 6 Häuser unbesetzt geblieben; hierauf hätte man die Vertheilung abgeändert, und nur 6 Mann in jedes Haus gelegt, so daß nach dieser neuen Vertheilung 1 Haus ohne Einquartirung geblieben. Nun frägt sichs, wie stark war das Detaschement, und wie hoch belief sich die Häuserzahl des Dorf's?

Auflösung:

Es sey die Zahl der Mannschaft x und die Häuser y. Weil bey der Vertheilung von 8 Mann auf jedes Haus, 6 Häuser leer blieben, so ist offenbar, daß die Zahl der Soldaten mit 8 dividirt, der Zahl der Häuser weniger 6: gleich seyn wird; also hat man gleich die erste Gleichung $\frac{x}{8} = y - 6$.

Zweytens: rechnet man 6 Mann auf jedes Haus, so bleibt eins übrig, daß keine Einquartirung hat: also muß die Zahl der Soldaten mit 6 dividirt der Zahl der Häuser weniger Eins gleich seyn. Hieraus folgt die 2te Gleichung $\frac{x}{6} = y - 1$. Wird nun die erste Gleichung von der 2ten abgezogen, bleibt $\frac{x}{24} = 6$ folglich $x = 5 \cdot 24 = 120$ Mann, und $y = \frac{x}{6} + 1 = 21$ Häuser.

Diese Aufgabe ist aus: Inbegrif sämmtlicher Kriegswissenschaften. Dessau, 1786. Erster Theil, 3tes Buch die Algebra enthaltend, Seite 109 entlehnt. Ich habe die zweyte Bedingung etwas geändert, weil sonst die Auflösung, wie sie in jenem Buche gegeben worden, durchaus falsch ist; überhaupt ist dieses Buch eine elende Compilation, meistens aus französischen Schriften. Die Verfasser waren, der ehemalige Königl. Preußs. Ingenieur-Hauptmann Chevalier d'Estimauville, und der Herr Chevallier Beris. Das Werk bestehet aus 9 Theilen, und nach einer Nachricht, die der Chevallier Beris selbst im 9ten Theile Seite 39 giebt, ist er der alleinige Herausgeber vom 3ten Theile an.

62ste Aufgabe.

Ein Vater hinterläßt bey seinem Tode einige Kinder nebst einem Vermögen, welches die Kinder folgendergestalt unter sich theilen. Das erste nimmt 100 Thlr. und dazu noch den 10ten Theil des Uebrigen. Darauf nimmt das zweyte 200 Thlr. und dazu noch den 10ten Theil des Uebrigen. Nun nimmt das dritte 300 Thlr. und dazu noch den 10ten Theil des Uebrigen u. s. w. Am Ende findet sich, daß das ganze Vermögen unter die Kinder gleich vertheilt worden ist. Es wird also gefragt: Wie groß das Vermögen gewesen? Wie viel Kinder hinterlassen worden? Wie viel ein jedes bekommen?

Auflösung:

Sobald man die Größe des ganzen Vermögens und den Antheil eines jeden Kindes kennt, so bald weiß man auch die Anzahl dieser letztern, weil sie dem Quo-

ti-

tienten gleich ist, und durch den Antheil eines Kindes dividirt, das ganze Vermögen giebt. Es sey also das hinterlassene Vermögen $= y$ und der Antheil jedes Kindes $= x$: so erhält von den Kindern:

Das erste $x = 100 + \frac{y - 100}{10}$

Das zweyte $x = 200 + \frac{y - x - 200}{10}$

Das dritte $x = 300 + \frac{y - 2x - 300}{10}$

Das vierte $x = 400 + \frac{y - 3x - 400}{10}$

u. s. w.

Da nun alle gleichviel bekommen haben, so ist:

$$\left(100 + \frac{y - 100}{10}\right) - \left(200 + \frac{y - x - 200}{10}\right) = 0$$

$$90 + \frac{y}{10} - 180 - \frac{y}{10} + \frac{x}{10} = 0 \quad \frac{x}{10} - 90 = 0$$

folglich $x = 900$ Thlr. Nun war $x = 100 + \frac{y - 100}{10}$

folglich $y = 8100$ Thlr.

Die Anzahl der Kinder aber ist $\frac{8100}{900} = 9$ Kinder.

Wir wollen diese Aufgabe allgemein vortragen, weil sie bequeme Formeln giebt.

63ste Aufgabe.

Das hinterlassene Vermögen eines Vaters sey y, dieses theilen die Kinder folgendergestalt unter sich. Das erste nimmt a Thlr. und dazu nach den $n$ten Theil des Uebrigen. Darauf nimmt das

zwey-

zweyte 2a und dazu noch den nten Theil des Uebrigen u. s. f. wie bey der vorhergehenden Aufgabe. Am Ende findet sich, daß jedes Kind gleichviel erhalten hat. Wie groß war das Vermögen gewesen? Wie viel Kinder hinterlassen worden? Wie viel hat ein jedes bekommen?

Auflösung:

Der Antheil jedes Kindes sey $= x$: so erhält von den Kindern:

Das erste $x = a + \frac{y - a}{n}$

Das zweyte $x = 2a + \frac{y - x - 2a}{n}$

subtrahirt.

$$- a + \frac{x}{n} + \frac{a}{n} = 0$$

und $- na + x + a = 0$

folglich $x = (n - 1) a$, aus $x = a + \frac{y - a}{n}$ folgt

$y = nx - (n - 1) a = n . (n - 1) a - (n - 1) a = (n - 1)^2 a$

und die Anzahl der Kinder $\frac{y}{x} = \frac{(n - 1)^2 a}{(n - 1) a} = n - 1$

In vorhergehender Aufgabe war $a = 100$; und $n = 10$, also die Anzahl der Kinder $= n - 1 = 10 - 1 = 9$. $x = (n - 1) a = 9 . 100 = 900$ und $y = (n - 1)^2 a = (n - 1) (n - 1) a = 9 . 900 = 8100$ wie vorhin.

64ste Aufgabe.

Drey Arbeiter graben in 120 Tagen einen Graben; der erste bekommt täglich 3 Gr. der andere

dere 5 Gr. und der dritte 6 Gr. Es erhält aber einer nach vollbrachter Arbeit so viel, wie der andere: Wie viel Tage hat jeder gearbeitet?

Auflösung.

Man setze, daß der erste x Tage gearbeitet hätte; so bekömmt er dafür $3x$ Groschen; des andern Arbeit aber sey in y Tagen geschehen, so wird er dafür $5 . y$ Groschen erhalten: Also hätte der dritte $120 - x - y$ Tage gearbeitet, und bekäme dafür $(120 - x - y) . 6$ Gr. $=$ $(720 - 6x - 6y)$ Gr. Da nun, wie vorausgesetzt, jeder gleichviel erhält; so ist sowol:

$3x = 5y$; als auch $5y = 720 - 6x - 6y$

oder $11y = 720 - 6x$

Es ist $10y = 6x$

addirt.

$21y = 720$

folglich: $y = 34\frac{2}{7}$

und $x = \frac{5y}{3} = \frac{5}{3} . 34\frac{2}{7} = \frac{5}{3} . \frac{240}{7} = \frac{400}{7} = 57\frac{1}{7}$

und endlich der dritte, $120 - (57\frac{1}{7} + 34\frac{2}{7}) = 120 - 91\frac{3}{7} = 28\frac{4}{7}$.

Probe.

Der erste arbeitet $57\frac{1}{7}$ Tage und erhält $57\frac{1}{7} . 3$ Gr. $= 171\frac{3}{7}$ Gr.

Der zweyte $34\frac{2}{7}$ . . . $34\frac{2}{7} . 5$ Gr. $= 171\frac{3}{7}$ Gr.

Der dritte $28\frac{4}{7}$ . . . $28\frac{4}{7} . 6$ Gr. $= 171\frac{3}{7}$ Gr.

65ste Aufgabe.

In einer Gesellschaft sind anfänglich m mal so viel Männer, als Frauen. Nachdem aber n Männer mit ihren Frauen weggegangen, so bleiben p mal so viel Männer, als Frauen zurück. Wie findet man die anfängliche Zahl der Männer x und der Frauen, y?

Es ist einmal $x = my$
und zweytens $x - n = p(y - n)$
folglich $my - n = py - pn$
und $(m - p)y = n(1 - p)$
folglich $y = \frac{n(1-p)}{m-p} = \frac{n(p-1)}{p-m}$

Regel. Um also die Anzahl der Frauen zu finden, darf man nur die Zahl, welche anzeigt, wie vielmal mehr Männer, als Frauen am Ende da gewesen, um 1 vermindert, mit der Anzahl der Männer, die mit ihren Frauen die Gesellschaft verließen, multipliciren, und das Produkt durch die beyden Zahlen dividiren, welche die anfängliche und letzte Menge der Männer in Vergleichung gegen die Frauen anzeigen.

Wäre z. B. $m = 5$, $n = 8$ und $p = 9$; so wäre $y = \frac{8.8}{4} = 16$. Die Anzahl der Männer $= x = my$ findet sich hieraus leicht. Im angeführten Falle ist sie $5 \cdot 16 = 80$.

Uebrigens muß hier sowol x als y immer eine eine ganze Zahl seyn. Wählt man sich daher selbst einzelne Fälle, so muß man für m, n und p immer solche Zahlen wählen, daß entweder $p - 1$, oder n, oder $(p - 1)n$, ein Vielfaches von $p - m$ ist. Siehe 55 und die darauf folgende Aufgabe.

66ste Aufgabe.

Es werden von einer gewissen Waare 100 ℔. zu 40 Gr. verlangt. Nun sind von dieser Waare 3 Sorten: eine zu 48 Gr., die zweyte zu 36 Gr., die 3te zu 28 Gr. Von der ersten sind 5 ℔. vorräthig. Von der zweyten Sorte ist

nicht

nicht genug vorräthig, um durch Vermischung mit der ersten den gesetzten Preis zu machen. Man muß also auch von der dritten Sorte einmischen. Die Frage ist, wie viel Pfunde von der zweyten und dritten Sorte genommen werden müssen.

Auflösung:

Von der zweyten Sorte nimmt man x und von der dritten y ℔.

Der Preiß von den drey verschiedenen Gewichten der eingemischten Waare muß gerade so viel ausmachen, als $40 . 100 = 4000$ Gr. das ist $48 . 52 + 36 x + 28 y = 4000$ oder $36 x + 28 y = 1504$ oder $9 x + 7 y = 376$
und $52 + x + y = 100.$, oder $x + y = 48$ oder $7 x + 7 y = 336$, diese Gleichung von $9 x + 7 y = 376$ abgezogen, bleibt $2 x = 40$, folglich $x = 20$ und $y = 48 - x = 48 - 20 = 28$

Probe.	20 ℔.	zu 36 Gr.	betragen	720 Gr.
	28 „	zu 28 „	„ „	784 „
	52 „	zu 48 „	„ „	2496 „
			Summa	= 4000 Gr.

Wäre von der besten Waare nur 20 ℔. vorräthig, die man mit der zweyten Sorte vermischen wolle, von welcher nun überflüßig da sey, und daß man erforderlichen Falls die dritte hinzufügen wolle.

Wir werden hier auf einen Fall gerathen, der unserer Aufmerksamkeit sehr würdig und das Allgemeine in der algebraischen Auflösung deutlich entdecken wird. Die vorhin gesetzten Gleichungen verändern sich nun in diese:

$$48 \cdot 20 + 36x + 28y = 4000 \text{ und } 20 + x + y = 100, \text{ also}$$
$$28 \cdot 20 + 28x + 28y = 2800$$
subtrahirt.
$$20 \cdot 20 + 8x = 1200$$
$$8x = 800$$
folglich $x = 100$ tb.

Dieses Resultat ist in der That sehr unerwartet. 100 tb. sind überhaupt nur nöthig. 20 von der besten Sorte und 100 von der schlechteren, machen 120 tb. Was wird nun aus der dritten werden? Dieses erfahren wir aus der Gleichung $20 + x + y = 100$, denn hier folgt $y = 80 - x = 80 - 100 = -20$.

Dieses ist eben so unerwartet. Von der dritten sollten also 20 tb. aus der Mischung der beyden ersten weggenommen werden, ohne daß etwas von derselben hinzugethan wäre. Allein man bemerke, daß in dieser Rechnung nicht die verschiedene Güte, sondern nur der Preis und die Gewichte der verschiedenen Sorten verglichen sind, und wenn man auf diese sieht, so ist es wahr, daß wenn man 100 tb. zu 36 Gr. durch die Untermischung von 20 tb. zu 48 Gr. verbessert, und von dieser Mischung 100 tb. für 40 Gr. verkauft, nach 20 tb. übrig bleiben, welche man, das tb. für 28 Gr. ohne Schaden wegschlagen kann. Dieses weiset die Probe aus:

20 tb. zu 48 Gr. . .	960 Gr.
100 tb. zu 36 Gr. . .	3600 .
Summe	4560 Gr.
100 tb. verkauft zu 40 Gr.	4000 .
bleiben übrig	560 Gr.
20 tb. zu 28 Gr.	560

Man geräth sehr oft in den algebraischen Exempeln auf solche Auflösungen, die ganz unerwartet sind, und zugleich uns entdecken, daß die Aufgabe nach der gemach-

ten

ten Voraussetzung sich nicht ausführen lasse. Man versuche es, wie man wolle, so wird sich, wenn man nur 20 ℔. der besten Sorte zu 48 Gr. hat, auf keine Art eine Mischung von allen drey Sorten der Waare machen lassen, die genau 100 ℔. gäbe, deren jedes 40 Gr. werth wäre. Hätte man 34 ℔. der besten Waare, so wird $x = 65$, $y = 1$, und man darf nur 1 ℔. von der schlechten Sorte zumischen. Hätte man 32, so würde $x = 70$, und $y = -2$; und man muß wieder 2 ℔. von der Mischung der beyden ersten Waaren wegnehmen, ohne daß eine dritte hinzukommen kann. Noch ist zu bemerken, daß bey dem hier einmal festgesetzten Preis der besten Waare, nie $y = 0$ werden kann, sondern, entweder positive oder negative Werthe erhält.

67ste Aufgabe.

Ein Kaufmann verkauft 30 Centner (von 100 ℔.) einer gewissen Waare, und 40 von einer schlechtern Sorte, zusammen für 1260 Mark. Nachmals aber 50 Centner der bessern, und 35 der schlechtern Sorte für 1625 Mark. Die Frage ist, wie hoch hat er die 100 ℔. oder den Centner gerechnet?

Auflösung.

Der Preis der bessern Sorte sey x
der schlechtern y
so ist $30x + 40y = 1260$,
$50x + 35y = 1625$, oder $10x + 7y = 325$
und also $30x + 21y = 975$, diese Gleichung von $30x + 40y = 1260$ abgezogen, bleibt $19y = 285$, folglich $y = \frac{285}{19} = 15$ aus der ersten Gleichung folgt $x = 42 - \frac{4y}{3}$; also $x = 42 - \frac{4.15}{3} = 42 - 4 . 5 = 22$

Pro-

Probe. 30 Centner zu 22 Mark = 660
40 " " 15 " = 600
Summa: 1260

50 Centner zu 22 Mark = 1100
35 " " 15 " = 525
Summe: 1625

68ste Aufgabe.

Ein Officier will die gemachte Beute unter seine Leute vertheilen; er findet aber, daß, wenn er einem Mann 4 Thlr. giebt, er 20 übrig habe; hingegen wenn er einem 5 Thlr. giebt, er 60 zu wenig habe. Wie viel Leute und Geld hat er gehabt?

Auflösung.

Es sey die Anzahl der Leute gleich x, und die Anzahl der Thaler $= y$.

Demnach haben wir folgende Gleichungen:

$4x + 20 = y$; und $5x - 60 = y$

$4x + 20 = y$

bleibt $x - 80 = 0$

folgl. $x = 80$ und daher $y = 4 \cdot 80 + 2 = 340$.

Also hat er 80 Mann und 340 Thlr. gehabt.

69ste Aufgabe.

Ihr Herren, spricht ein Gastwirth zu seinen Gästen, wenn ein jeder von euch 4 Thaler zahlte, würdet ihr 20 Thaler weniger zahlen, als ihr schuldig seyd: zahlte aber ein jeder 5 Thaler, so würdet ihr noch 30 Thaler zu verzehren haben.

ben. Man fragt: 1) Wie viel der Gäste; 2) wie groß ihre Schuld gewesen?

Auflösung:

Es sey die Zahl der Gäste x, ihre Schuld $= y$ so ist laut der Aufgabe:

$4x = y - 20$; und $5x = y + 30$
$4x = y - 20$ daher $y =$
$4 \cdot 50 + 20 = 220$.

70ste Aufgabe.

Wie alt waren wol Pyramus und Thysbe? Wollte man von dem Alter x des Pyramus zu dem Alter y der Thysbe 5 Jahr hinzusetzen, so würden beyde gleich alt gewesen seyn. Wollte man aber von der Thysbe ihrem Alter 5 Jahre zu jenem des Pyramus zulegen; so würde dieser dreymal älter als jene gewesen seyn.

Auflösung:

Es ist der Aufgabe gemäß $y - 5 = x + 5$
und $y + 5 = 3x - 15$, die
obere Gleichung von der untern abgezogen } bleibt $10 = 2x - 20$
oder $30 = 2x$
folglich $15 = x$
und daher $y = x + 10 = 25$.

72ste Aufgabe.

Herr! fragte jemand, welchen Lohn geben sie ihrem Gesinde? Ich, sagte jener, habe einen Diener und eine Magd. Jener bekömmt jährlich 16 Thlr. mehr, als diese. Wenn ich des Dieners Lohn

Lohn x mit jenem der Magd y dividire, kommen 13 zum Quotienten heraus.

Auflösung:

Der Aufgabe gemäß ist $x - y = = 16$ und $\frac{x}{y} = 13$, also $x = 13y$, daher $13y - y = 16$; oder $12y = 16$; folglich $y = 1\frac{1}{3}$, und $x = 17\frac{1}{3}$.

72ste Aufgabe.

Zween Gesellen A und B kehren aus einer Spielgesellschaft zurück. Wie viel habt ihr verlohren? fragt B; wenn ich noch einen Thaler im Spiele gelassen hätte, antwortet A, würde mein Verlust x zweymal so groß, als euer Gewinnst y gewesen seyn. Hätte ich aber 1 Thaler weniger, da hätte ich genau so viel verlohren, als ihr gewonnen habt.

Auflösung:

$$\begin{aligned} \text{Es ist } x + 1 &= 2y \\ x - 1 &= y \\ \hline \text{bleibt } 2 &= y \end{aligned}$$

und daher $x = y + 1 = 3$.

73ste Aufgabe.

Ein Herr geht mit seinem Diener folgende Bedingung ein: Bursche! wofern du dich nicht berauschest, sollst du täglich 2 Gr. zu gewarten haben; widrigenfalls wird man dir für jeden Rausch 3 Gr. vom Lohne abziehn. Nach Verlauf von 40 Tagen, als sie mit einander rechnen wollten, fand sich, daß einer von dem andern nichts zu fordern hatte. Man frägt nun, wie viel Tage x der Bursche berauscht, und wie

viel

viel Tage y er nüchtern während der Zeit gewesen sey.

Auflösung:

Es ist $x + y = 40$ oder $2x + 2y = 80$, nach der ersten Bedingung, und nach der zweyten ist: $2y = 3x$, also $5x = 80$, folglich $x = 16$, daher $y = 40 - x = 24$.

74ste Aufgabe.

Ein Fürst braucht jährlich zum Unterhalt seiner Truppen 5694000 Thlr.; Die Truppen bestehen aus 4mal mehr Infanterie als Cavallerie. Der tägliche Unterhalt eines Cavalleristen, für sich, sein Pferd, Kleidung und Waffen beträgt 20 Gr. und eines Infanteristen nur 8 Gr. Wie stark ist die Cavallerie und Infanterie?

Auflösung:

Da das Jahr zu 365 Tage gerechnet wird, so braucht der Fürst täglich $\frac{5694000}{365} = 15600$ Thlr.

Nun sey die Anzahl der Cavalleristen $= x$, und y die Anzahl der Infanteristen, also da 20 Gr. $= \frac{5}{6}$ Thlr., so ist $\frac{5}{6}x + \frac{1}{3}y = 15600$, $5x + 2y = 15600 \,.\, 6$ ferner ist $4x = y$; oder $8x = 2y$, so ist $5x + 8x = 15600 \,.\, 6$ oder $13x = 15600 \,.\, 6$, folglich $x = \frac{15600 \,.\, 6}{13} = 1200 \,.\, 6 = 7200$, und also $y = 4 \,.\, 7200 = 28800$, also $x + y = 7200 + 28800 = 36000$.

75ste Aufgabe.

Die Mannschaft zweyer Armeen, verhielt sich vor der Schlacht wie 7 zu 8. In der Schlacht verlohr die erste 3000 und die zweyte Armee 2000 Mann. Nun verhielt sich die Mannschaft der

er-

ersten zur Mannschaft der andern wie 6 zu 7. Wie stark war jede Armee?

Auflösung:

x sey die Mannschaft der ersten und y die der zweyten Armee.

Nach der ersten Voraussetzung ist: $x : y = 7 : 8$, also $8x = 7y$, mithin $x = \frac{7y}{8}$ und $7x = \frac{49 \cdot y}{8}$

Nach der Schlacht war die erste Armee bis auf $x - 3000$, und die zweyte bis auf $y - 2000$ Mann geschmolzen.

Und nun verhält sich $(x - 3000) : (y - 2000) = 6 : 7$,

daher $7x - 21000 = 6y - 12000$

oder $7x = 6y + 9000$; daher $\frac{49y}{8} = 6y + 9000$, folglich $49y = 48y + 72000$; mithin $y = 72000$ Mann und $x = \frac{7}{8} \cdot 72000 = 63000$ Mann.

76ste Aufgabe.

Ein General schickt zwey Detaschements Infanterie von seiner Armee. Die Anzahl der Bataillione des ersten, nebst der Hälfte des andern ist gleich 20, und die Anzahl des zweyten nebst einen Drittel des ersten Detaschment, ist auch $= 20$. Aus wie viel Bataillionen bestehet jedes Detaschement?

Auflösung.

x sey die Anzahl der Bataillione des ersten und y die Anzahl des zweyten Detaschement.

Vermöge der Bedingungen der Aufgabe hat man folgende zwey Gleichungen; $x + \frac{y}{2} = 20$, und $y + \frac{x}{3} = 20$

also $x + \frac{y}{2} = y + \frac{x}{3}$

folglich $\frac{2x}{3} = \frac{y}{2}$. oder $4x = 3y$, aus der ersten Gleichung folgt $4x + 2y = 80$, also $5y = 80$, mithin $y = 16$, und $x = 20 - \frac{y}{2} = 20 - 8 = 12$.

77ste Aufgabe.

Ein wohlthätiger Mann will eine gewisse Anzahl Friedrichsdor geben, um eine bestimmte Zahl von Armen zu kleiden. Er findet aber, daß wenn er 3 mehr kleiden wollte, als er bestimmte, er genöthiget wäre die Kleidung eines jeden Armen um einen Friedrichsdor schlechter machen zu lassen. Wollte er aber zwey weniger kleiden, so könnte er jede Kleidung um zwey Friedrichsdor besser machen lassen. Frage: wie viel Arme? wie viel kostet eine Kleidung? und wie groß war die Anzahl der Friedrichsdor?

Auflösung.

Es sey x die Zahl der Armen, und y der Preis einer Kleidung. So ist klar, daß xy gleich der Summe ist, welche ihm die Armen zu kleiden kosten.

Wenn die Zahl der Armen um 3 zugenommen hätte, so würde jede Kleidung $\frac{xy}{x+3}$ kosten. Wenn sie aber um zwey abgenommen hätten, so würde jede Kleidung $\frac{xy}{x-2}$ kosten.

Im ersten Fall hat man vermöge der Aufgabe $\frac{xy}{x+3} = y - 1$; und im zweyten $\frac{xy}{x-2} = y + 1$.

Also

Also $\frac{xy}{x-2} + \frac{xy}{x+3} = (y+1) + (y-1)$

$xy\,[x+3+(x-2)] = 2y\,(x-2)\,(x+3)$ mit y dividirt.

giebt $2x^2 + x = 2x^2 + 2x - 12.$
folglich: $x = 12$, und $y = 5$.

78ste Aufgabe.

Ein Kaufmann hat zwey Wechsel, diese betragen zusammen 1643 französ. Livres; den ersten verkauft er für 5 Livres franzs., 3 Lieres Genfer Courant und den zweyten für 8 Livres franzs. 5 Lieres Genfer Courant. Für beyde erhielt er die Summe von 1000 Lieres Courant. Wie viel beträgt ein jeder Wechsel, in jeder der angegebenen Münzsorte?

Auflösung:

Es sey x die Summe der französ. Livres, welche in Verhältniß von 5 zu 3 verhandelt, und y diejenige Summe, die im Verhältniß von 8 zu 5 verwechselt sind.

So ist $x + y = 1643$

ferner: $5 : 3 = x : \frac{3x}{5}$ und $8 : 5 = y : \frac{5y}{8}$

und $\frac{3x}{5} + \frac{5y}{8}$ $1000 =$ oder, $24x + 25y = 40000$

Da $x + y = 1643$ so ist auch $25x + 25y = 41075$

Die obere Gleichung von der untern subtrahirt, giebt: $x = 1075$, folglich $y = 1643 - 1075 = 568$

Probe. $x = 1075$ à 5 für 3, giebt 645
$y = 568$ à 8 für 5, giebt 355
1643 1000

79ste Aufgabe.

Zwey Zahlen zu finden, wenn man zu ihrer Summe ihre Differenz addirt, so kommt ihr Produkt heraus; wenn man aber von ihrer Differenz auch die kleinere subtrahirt, so kommt ihr Quotient heraus.

Auflösung:

Die größte der gesuchten Zahlen sey x und die kleinste gleich y, so ist ihre Summe $= x + y$

und ihre Differenz $= x - y$ addirt.

kommt $2x$

Nun soll $2x = xy$ seyn, also $2 = y$

ferner soll seyn $x - 2y = \frac{x}{y}$, also $x - 4 = \frac{x}{2}$,

daraus folgt $x = 8$.

80ste Aufgabe.

Zwey Zahlen zu finden, wenn man zu ihrer Summe ihre Differenz addirt, so kommt ihr Produkt heraus; subtrahirt man aber die Differenz von der Summe, so kommt ihr Quotient heraus.

Auflösung:

Die größte Zahl sey x, die kleinste y.

So ist $x + y$ ihre Summe, und

$x - y$ ihre Differenz.

Zusammen addirt, geben sie: $2x$ und von einander subtrahirt $2y$.

Nun soll $2x = xy$ seyn, also $2 = y$

ferner $2y = \frac{x}{y}$; also $4 = \frac{x}{2}$; folglich $x = 8$.

Dieses würde man auch ohne Algebra haben finden können.

Merk-

Merkwürdig ist es, daß hier in der 79 und 80sten Aufgabe zwo Zahlen gefunden werden, ohne daß irgend eine gegeben war. Der allgemeine Begriff vom Rechnen ist also nicht: Aus gegebenen Zahlen andere finden. Man findet auch Zahlen, aus ihrem gegebenen gegenseitigen Verhalten. Auch ist zu bemerken, daß beyde vorhergehende Aufgaben einerley Resultat geben.

81ste Aufgabe.

Es verzehrt jemand auf seiner Reise sein ganzes Vermögen. In dem ersten Lande verzehrt er a, und noch den bten Theil von dem übrigen, in dem zweyten verzehrt er 2a und wiederum den bten Theil von dem übrigen, u. s. w., bis sein Vermögen aufgezehrt war. Es ist die Frage, wie groß sein Vermögen war? und wie viel Länder er besehen hat? angenommen, er habe in jedem Lande gleichviel verzehrt.

Auflösung.

Sein Vermögen sey x, und die Zahl der besuchten Länder $= y$.

Er hat also verzehrt:

Im ersten Lande $a + \frac{x - a}{b} = A.$

Im zweyten Lande $2a + \frac{x - 2a - A}{b} = 2a + \frac{x - 3a - \left(\frac{x - a}{b}\right)}{b}$ also muß $a + \frac{x - a}{b} = 2a + \frac{x - 3a - \left(\frac{x - a}{b}\right)}{b}$

und

und $x - a = ab + x - 3a - \left(\frac{x-a}{b}\right)$

$$2a = ab - \left(\frac{x-a}{b}\right)$$

$$2ab = ab^2 - x + a$$

folglich $x = ab\,(b-2) + a = a\,(b^2 - 2b + 1) = a\,(b-1)^2$. In jedem Lande verzehrte er $a + \frac{x-a}{b} = \frac{a\,(b-1) + x}{b} = \frac{a\,(b-1) + a\,(b-1)^2}{b}$
$= \frac{a\,(b-1)\,(1 + b - 1)}{b} = a\,(b-1)$.

Da er nun y Länder besucht hat, so ist seine Verzehrung überhaupt $ya\,(b-1) = a\,(b-1)^2$; folglich $y = b - 1$. Es sey $a = 1000$; $b = 3$; so ist $y = 3 - = 2$ Länder und $x = 2^2 \cdot 1000 = 4000$.

Diese Aufgabe so wie mehrere andere, habe ich aus Kochs vollständigen Rechenbuche: Dresden 1783, 4ten Theil, Seite 613 entlehnt. Herr Koch giebt zwar eine richtige Auflösung dieser Aufgabe, allein er giebt für x und y keine so bequeme Formeln wie ich – aber hierinn liegt ja eigentlich die Kunst des Analysten – was hilft mir eine Formel, deren Anwendung mich ermüdet. Siehe die 63ste Aufgabe.

82ste Aufgabe.

Es begegnen jemanden einige Bettler, die ihm um ein Almosen ansprachen, er antwortet ihnen: wäret ihr nur eine halbe Stunde früher gekommen, so hätte ich einen jeden a Gr. geben können, denn ich habe eben erst c Thlr. ausgegeben, und hätte doch noch b Gr. übrig behalten, nun kann ich euch nicht mehr als jeden d Gr. geben und so bleibt mir nicht einmal ein Heller übrig. Nun ist

ist die Frage: wie viel Bettler sind da gewesen? und wie viel Geld hat er zuletzt gehabt?

Auflösung:

Setzet, es seyn y Bettler gewesen, und er habe noch x Gr. gehabt. Hätte er einem jeden d Gr. gegeben, so wäre ihm nichts übrig geblieben, also wäre $dy = x$; vorher hatte er $x + c$, und wenn er alsdann jeden a Gr. gegeben hätte,

so wäre: $ay = x + c - b$ (denn b Gr. hatte er noch übrig)

$$\frac{\begin{aligned} ay &= x + c - b \\ dy &= x \end{aligned}}{}$$

bleibt $(a - d)\,y = c - b$

folglich $y = \frac{c - b}{a - d}$

Es sey $a = 3$; $b = 8$; $c = 2$ Thlr. $= 48$ Gr.; $d = 2$; so ist $y \frac{48 - 8}{3 - 2} = 40$ Bettler, und $x = 2 \cdot 40 = 80$ Gr. $= 3$ Thlr. 8 Gr. am Gelde.

83ste Aufgabe.

Ein Commendant wird gefragt: wie viel er Soldaten in der Festung hat? worauf er antwortet: Ich habe amal so viel zu Fuß, als zu Pferde, und diese alle zusammengenommen, sind b mal so viel über c als die Reuter unter c. Nun ist die Frage: wie viel Reuter und Fußvolk er hatte?

Auflösung:

Gesetzt, er habe x Mann zu Fuß und y zu Pferde gehabt, so ist $x = ay$. Der Reuter unter c sind $c - y$, und die über c betragen alle zusammen $x + y - c$. Dieses ist bmal so viel als $c - y$, also $x + y - c = bc - by$; oder $ay + y - c = bc - by$ $(a + b + 1)\,y = c\,(b + 1)$

folg-

folglich $y = \frac{c(b + 1)}{a + b + 1}$

Es sey $a = 3$; $b = 4$; $c = 2000$; so ist $y = \frac{2000 . (4 + 1)}{3 + 4 + 1} = \frac{2000 . 5}{8} = \frac{10000}{8} = 1250$ und $x = 3 . 1250 = 3750$.

Probe. Offenbar ist $3750 = 3 . 1250$. und $1250 + 3750 = 5000$; also $5000 - 2000 = 3000$ und $2000 - 1250 = 750$, und $4 . 750 = 3000$.

84ste Aufgabe.

Einer will a Ellen Tuch kaufen, er erschrickt aber, wie er den Preis vernimmt und sagt: vor einigen Jahren konnte ich für das Geld, was ich bey mir habe, dmal so viel kaufen, und hatte noch b Thlr. übrig; nun muß ich noch b Thlr. dazu haben, wenn ich dieses will. Jetzt ist die Frage: wie theuer war die Elle Tuch? und wie viel Geld hat er bey sich gehabt?

Auflösung:

Er habe x Thlr. bey sich gehabt, und die Elle Tuch koste y Thlr. Da er nun vor einigen Jahren dmal so viel für eben das Geld hätte kaufen können, so muß auch die Elle dmal wohlfeiler gewesen seyn, da sie nun jetzt y kostet, so hat sie damals nur $\frac{y}{d}$ gegolten. a Ellen zu y Thlr., die jetzt ay kosten, hätten ehedem nur $\frac{ay}{d}$ gekostet.

Um aber ay Thlr. auszugeben, fehlen ihm b Thlr., also ist $ay = b + x$, wenn er aber nur $\frac{ay}{d}$ ausgeben soll, so hat er noch b Thlr. übrig, also $\frac{ay}{d} = x - b$;

diese Gleichung von $ay = b + x$ abgezogen giebt $ay\left(1-\frac{1}{d}\right) = 2b$; oder $ay\left(\frac{d-1}{d}\right) = 2b$; folglich $y = \frac{2bd}{a(d-1)}$

Es sey $a = 12$; $b = 24$; $d = 3$; so ist $y = \frac{2 \cdot 24 \cdot 3}{12(3-1)} = 2 \cdot 3 = 6$ Ellen. Daher $x = ay - b = \frac{2bd}{d-1} - b = \frac{2bd - bd + b}{d-1} = \frac{b(d+1)}{d-1}$ in Zahlen $\frac{24 \cdot (3+1)}{3-1} = 48$ Thlr.

85ste Aufgabe.

Ein Kaufmann vertauscht ein Stück Tuch, welches a Ellen hält, gegen 2 Stück schlechteres. Das eine von den schlechtern Stücken, schwarz von Farbe, hält b Ellen, das andere von den schlechtern ist blau, und hält c Ellen. Eine Elle vom schwarzen kostet so viel, als eine Elle von dem blauen; für das schwarze gab er d Ellen und erhielt noch e Thlr., für die noch übrigen $a-d$ Ellen erhielt er das blaue Stück Tuch. Nun ist die Frage: was kostet eine Elle von dem bessern, und was von dem schlechtern?

Auflösung:

Die Elle von dem bessern Tuche koste x Thlr. und die von dem schlechtern y Thlr., alsdann kosten d Ellen des bessern, offenbar dx, und $a-d$ Ellen kosten $ax - dx$; ferner b Ellen des schwarzen kosten by, und c Ellen blau Tuch kosten cy.

Laut der Aufgabe muß nun seyn:

$dx = by + e$ und $ax - dx = cy$; also:
$cdx = bcy + ce$ und $abx - bdx = bcy$ diese Gleichung

chung von der vordern abgezogen

giebt $(cd + bd - ab)\, x = ce$

folglich $x = \frac{ce}{cd + b(d - a)}$

Da $(a - d)\, x = cy$; so ist $y = \frac{(a - d)\, e}{cd + b(d - a)}$

Es sey $a = 40$; $b = 50$; $c = 30$; $d = 30$; $e = 40$; so ist $x = \frac{30 \cdot 40}{30 \cdot 30 + 50 (30 - 40)} = \frac{3 \cdot 4}{3 \cdot 3 + 5 (-1)} = \frac{3 \cdot 4}{9 - 5} = 3$ Thlr.; und $y = \frac{(40 - 30) 40}{30 \cdot 30 - 500} = \frac{400}{900 - 500} = 1$ Thlr.

86ste Aufgabe.

Ein Hauptmann stellt seine Truppen in drey Glieder, da bleiben ihm zwey Mann übrig, er macht die Glieder noch einmal so groß und formiret nur zwey Glieder, da fehlen ihm aber 10 Mann, nun ist die Frage, wie viel waren in einem Gliede? und wie viel Truppen hat er gehabt?

Auflösung:

Die Anzahl der Truppen sey x, und das erstemal sollen y Männer in einem Gliede gewesen seyn, so stehen das zweytemal $2y$ Männer in einem Gliede.

Das erstemal stehen also in den 3 Gliedern $3y$, und es sind ihm 2 Leute übrig geblieben, also ist $3y = x - 2$.

Das zweytemal stehen in den zwey Gliedern $4y$, allein nun fehlen ihm 10 Mann, also ist auch:

$$4y = x + 10$$

Es war $3y = x - 2$

folglich $y = 12$ und $x = 3y + 2 = 38$.

87ste Aufgabe.

Was sind das für zwey Zahlen, wenn man zu der ersten a addirt, und von der zweyten b subtrahirt; ingleichen, wenn man die erste mit c, und die zweyte mit d multiplicirt, daß im ersten Fall die Summe und der Rest, im andern Fall aber, beyde Produkte einander gleich sind?

Auflösung:

Die erste Zahl sey x, die zweyte y, so ist:

$$x + a = y - b; \text{ und } cx = dy$$

daher $dx + ad = dy - bd$ diese Gleichung von $cx = dy$ abgezogen,

läßt $(c - d)\,x - ad = bd$, also $x = \frac{(a + b)\,d}{c - d}$

und da $dy = cx$, so ist $y = \frac{cx}{d} = \frac{(a+b)\,c}{c - d}$

Es sey $a = 3$, $b = 6$, $c = 10$; und $d = 8$ so ist $x = \frac{(3 + 6)\,8}{10 - 8} = 9 \cdot 4 = 36$, und $y = \frac{9 \cdot 10}{2} = 45$. Hieher gehört folgende Aufgabe.

88ste Aufgabe.

Einer kaufte zweyerley Waare; hätte er 1 ℔. von der erstern um 20 Krz. theurer, und 1 ℔. von der andern 15 Krz. wolfeiler bekommen, so würden beyde Preise gleich gewesen seyn; und hätte er von der erstern 12 ℔. und von der andern 7 ℔. genommen, so hätte er für eine Waare so viel als für die andere bezahlen müssen. Wie hoch ist ein ℔. jeder dieser Waare gekommen?

Auflösung:

Von der ersten Waare habe das ℔. x Krz., und von der zweyten y Krz. gekostet. Man wird leicht einsehen, daß aus der vorhergehenden Aufgabe $a = 20$ Krz. $b = 15$ Krz.

c

$c = 12$ ℔.; und $d = 7$ ℔. folglich $x = \frac{(20+15).7}{12-7}$ $= 49$ Krz. und $y = \frac{35}{5} \cdot 12 = 84$ Krz. Auch folgende Aufgabe gehört hierher.

89ste Aufgabe.

Ein Hauptmann hatte unter seinen Befehlen 60 Mann Grenadier, und 80 Mann Musquetier, jene bekommen zusammen täglich so viel, als diese, rechnet man für einen Grenadier 2 Krz. weniger, und für einen Musquetier 3 Krz. mehr, so bekäme einer so viel als der andere. Wie viel hat ein Grenadier und ein Musquetier täglich bekommen?

Auflösung.

Der tägliche Sold des Grenadiers sey x, und des Musquetiers $= y$; so ist aus der 87sten Aufgabe. $a = 2$ Krz., $b = 3$ Krz., $c = 80$ Mann, und $d = 60$ Mann, also:

$x = \frac{(2+3).60}{80-60} = 15$ Krz. und $y = \frac{5.80}{20} = 20$ Krz.

90ste Aufgabe.

Was sind das für Zahlen? Wenn ich zu der ersten a addire, so wird sie um bmal der zweyten Zahl größer als die zweyte. Addire ich aber a zur zweyten, so wird diese zweymal so groß als die kleinere.

Auflösung:

Die erste Zahl nenne man x, und die zweyte y. Aus den Bedingungen der Aufgabe folgt:

$$x + a - by = y \text{ und } y + a = 2x,$$

also

also $2x + 2a - 2by = 2y$
und $2x = y + a$ subtrahiert.

$2a - 2by = y - a$

$3a = (2b+1)y$; folglich $y = \frac{3a}{2b+1}$, und $x = \frac{\left(\frac{3a}{2b+1} + a\right)}{2} = \frac{(b+2)a}{2b+1}$. Folgende 3 Aufgaben mögen als Beyspiele dienen.

91ste Aufgabe.

Als einer nach dem Werthe zweyer Tabattieren gefragt wurde, antwortete er: In der kleinern liegen 18 Ducaten, und darum ist sie um den vierten Theil des Werths der größern Tabattiere mehr werth, als die größere; thut man aber die 18 Ducaten in die größere Tabattiere, so wird solche noch einmal so viel werth seyn, als die kleinere. Wie viel war jede Tabattiere ohne die Ducaten werth?

Auflösung:

Der Werth der kleinern Tabattiere sey $= x$, der Werth der größern $= y$, ferner ist aus der vorhergehenden Aufgabe $a = 18$ Ducaten, $b = \frac{1}{4}$; so ist $y = \frac{3 \cdot 18}{2 \cdot \frac{1}{4} + 1} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 18}{3} = 36$ Ducaten und $x = \frac{(\frac{1}{4} + 2)\, 18 \cdot 2}{3} = (\frac{1}{4} + 2) \cdot 6 \cdot 2 = 9 \cdot 3 =$ 27 Ducaten.

92ste Auf-

92ste Aufgabe.

Ein Ingenieur fragte einen Officier, welcher zwey Recruten angeworben hatte: Wie viel er jedem Handgeld gegeben? darauf er antwortet: Der eine ist etliche Zoll höher, als der andere; und wenn ich dem Kleinern 30 Fl. mehr gegeben hätte, so hätte er $\frac{2}{5}$ vom Handgelde des Größern, mehr als der Größere bekommen: hätte ich aber dem Größern 30 Fl. mehr gegeben, so hätte er noch einmal so viel als der Kleinere bekommen: Verstehet der Herr nun die Algebra, so kann er erfahren, wie viel einer erhalten hat?

Auflösung:

Wird das Handgeld des Kleinern $= x$, und das Handgeld des Größern $= y$ angenommen, so ist hier $a = 30$ Fl. und $b = \frac{2}{5}$.

Es ist daher $y = \frac{3 \cdot 30}{2 \cdot \frac{2}{5} + 1} = \frac{3 \cdot 30 \cdot 5}{9} = 50$ Fl.

und $x = \frac{(\frac{2}{5} + 2)\, 30 \cdot 5}{9} = \frac{12 \cdot 30}{9} = 4 \cdot 10 = 40$ Fl.

93ste Aufgabe.

A und B hatten eine Summe Geld zu theilen, also, daß wenn man zu des A seinem Theil noch 48 Thlr. legte, er $\frac{5}{6}$ von des B Antheil mehr als B, und wenn man zu des B Antheil 48 Thlr. thut, solcher noch einmal so viel als A hätte. Wie viel war eines jeden Antheil?

Auflösung:

Des A Antheil sey x, und des B Antheil sey y. Ferner ist hier $a = 48$ Thlr. und $b = \frac{5}{6}$.

Folglich $y = \frac{3 \cdot 48}{2 \cdot \frac{5}{6} + 1} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 48}{8} = 3 \cdot 3 \cdot 6 = 54$ Thlr.

und $x = \frac{(\frac{5}{6} + 2) \cdot 48 \cdot 3}{8} = (\frac{5}{6} + 2)\, 6 \cdot 3 = 17 \cdot =$ 51 Thlr.

94ste Aufgabe.

Einer kaufte von dreyerley Waaren, als: Von A, B und C zusammen 70 ℔ und bezahlte für 1 ℔. von A 30 Krz. für 1 ℔. von B 20 Krz., und für 1 ℔. von C 16 Krz. Da er nun für eine Waare so viel als für die andere bezahlte, so ist die Frage: Wie viel Pfund derselbe von jeder Sorte gekauft hat?

Auflösung:

Von der Waare A, x ℔, von B, y ℔., also von C, $70 - x - y$ ℔.

Die von A kostet ihm also $30 \cdot x$, die von B, $20 \cdot y$, und die von C, $16\,(70 - x - y) = 1120 - 16x - 16y$

laut den Bedingungen ist $30 \cdot x = 20 \cdot y$ und $20y = 1120 - 16x - 16y$ oder $36y = 1120 - 16x$, aus der ersten Gleichung folgt $y = \frac{3}{2}x$, diesen für y gefundenen Werth in die zweyte Gleichung gesetzt, giebt $36 \cdot \frac{3}{2}x = 1120 - 16x$ oder $54x = 1120 - 16x$ oder $70x = 1120$, folglich $x = 16$ ℔.; und $y = \frac{3}{2} \cdot 16 = 24$ ℔., daher von $C = 70 - 24 - 16 = 30$ ℔.

95ste Aufgabe.

Einer hat 118 Stück von dreyerley Geldsorten, als: Ducaten zu 5 Fl. Carolinen zu 11 Fl. und Souverainen zu 15 Fl. es beträgt aber eine jede Sorte so viel Gulden als die andere. Wie viel Stücke sind es von jeder Sorte?

Auf-

Auflösung:

Die Anzahl der Ducaten sey $= x$, die der Carolinen $= y$, so ist die Anzahl der Souverainen $= 118 - x - y$.

Demnach ist $5x = 11 . y$ und $5x = 15 (118 - x - y)$ oder $x = 354 - 3x - 3y$, oder $4x = 354 - 3y$ oder $20x = 1770 - 15y$ und da $5x = 11y$, so ist auch $20x - 44y$ also $44y = 1770 - 59y$ und $599 = 1770$, folglich $y = 30$ Carolinen, aus der ersten Gleichung folgt $x = \frac{11}{5} y = \frac{11}{5} . 30 = 66$ Ducaten und endlich die Anzahl der Souverains $= 118 - 30 - 66 = 22$.

96ste Aufgabe.

Ambrosius sagte zum Bernhardus: Wenn du mir von deinem Gelde ein Drittheil und noch 3 Fl. gäbest, so hätte ich dreymal so viel, als dir übrig bliebe. Bernhardus antwortete: Und wenn du mir von deinem Gelde die Hälfte gäbest, und noch 2 Fl. darzu, so hätte ich neunmal so viel, als dir übrig bliebe. Wie viel hat jeder gehabt?

Auflösung:

Des Ambrosius Geld sey $= x$, des Bernhardus Geld $= y$, so ist $x + \frac{1}{3} y + 3 = 3 (y - \frac{1}{3} y - 3)$ $= 3y - y - 9 = 2y - 9$ oder $3x + y + 36 = by$, oder $3x + y + 36 = 6y$ oder $3x + 36 = 5y$.

ferner ist ist auch $y + \frac{1}{2} x + 2 = 9 (x - \frac{1}{2} x - 2) = \frac{9}{2} x - 18$

oder $y + 20 = 4x$

und $5y + 100 = 20x$

aber $5y = 3x + 36$

bleibt $100 = 17x - 36$.

Daher $136 = 17x$

folglich $8 = x$, und $y = 4x - 20 = 4 . 8 - 20 = 12$.

97ste Aufgabe.

Als ein Schäfer um die Anzahl seiner Schaafe und Hammel befragt wurde, antwortete er: Thue ich von den Hammeln $\frac{2}{5}$ und 10 Stück zu den Schaafen, so machen solche dreymal so viel Stück zusammen, als Hammel übrig bleiben; thue ich aber von den Schaafen $\frac{3}{10}$, und noch 20 Stück zu den Hammeln, so machen solche so viel Stücke zusammen, daß $\frac{1}{3}$ derselben so viel sind, als von den Schaafen übrig bleiben. Wie viel Stücke waren es von jeder Gattung?

Auflösung:

Nennt man die zusuchende Anzahl der Schaafe x, die Hammel y, so muß $x + \frac{2}{5}y + 10 = 3(y - \frac{2}{5}y - 10)$

oder $5x + 2y + 50 = 15 - 6y - 150$

oder $5x + 200 = 7y$, also $50x + 2000 = 70y$

Ferner ist $y + \frac{3}{10}x + 20 = 3(x - \frac{3}{10}x - 20)$

oder $10y + 3x + 200 = 21x - 600$

oder $10y + 800 = 18x$ (7

$70y + 5600 = 126x$

und $70y = 50x + 2000$

bleibt $5600 = 76x - 2000.$

oder $7600 = 76x$

folglich $100 = x$

Da $7y = 5x + 200$, so ist $y = \frac{5x + 200}{7} = \frac{700}{7} = 100.$

98ste Aufgabe.

Ein Commendant hatte auf einem Posten Husaren, und auf dem andern Infanterie. Zu einer Zeit detaschirte er ein Drittheil und 10 Mann Husaren zur Verstärkung der Infanterie, da blieben so viel Husaren auf dem Posten, als ein Fünftheil der Infanterie und der detaschirten Husaren zusammen ausmachten; wäre im Gegentheil von der Infanterie die Hälfte und 40 Mann zu den Husaren detaschirt worden, so wären derselben so viel stehen geblieben, als ein Achttheil der Husaren und der detaschirten Infanterie zusammen ausgemacht hätten. Wie viel waren Infanteristen und Husaren?

Auflösung:

Die Anzahl der Infanteristen sey x, und der Husaren $= y$.

Demnach ist der ersten Bedingung gemäß:

$$x + \tfrac{1}{3}y + 10 = 5\,(y - \tfrac{1}{3}y - 10) = \frac{10y}{3} - 50$$

daher $3x + y + 30 = 10y - 150$

und $3x + 30 = 9y - 150$ (7

$$21x + 210 = 63y - 1050$$

Nach der zweyten Bedingung ist:

$$8\,(x - \tfrac{1}{2}x - 40) = y + \tfrac{1}{2}x + 40$$

$$4x - 320 = y + \tfrac{1}{2}x + 40$$

$$\tfrac{7x}{2} - 320 = y + 40$$ (6

$$21x - 1920 = 6y + 240;$$ Es war

$$21x + 210 = 63y - 1050$$ die aber von der untern abgezog.

bleibt $2130 = 57y - 1290$

3420

$$3420 = 57y$$

folglich $\frac{3420}{57} = 60 = y.$

Aus der Gleichung $3x + 30 = 9y - 150$

finden wir $x = \frac{9y - 180}{3} = 3y - 60 = 3 . 60 - 60 = 2 . 60 = 120$

Probe. $120 + \frac{1}{3} . 60 + 10 = 5 (60 - \frac{1}{3} 60 - 10) = 150$ 8 $(120 - \frac{1}{2} . 120 - 40) = 60 + \frac{1}{2} . 120 + 40 = 160$, wie es verlangt wurde.

99ste Aufgabe.

Zwey Zahlen zu finden, die sich verhalten wie a zu b, und wenn von ihnen beyderseits zwey andere Zahlen, die sich wie c : d verhalten, abgezogen worden, sollen sich die Reste wie f : g verhalten, die Summe dieser Reste gleich h seyn.

Auflösung:

Es seyn ax und bx die beyden ersten Zahlen (denn diese verhalten sich offenbar wie a : b,) die zwey letzten nenne man cy und dy (denn diese verhalten sich auch wie c : d). Nun soll sich verhalten:

$$ax - cy : bx - dy = f : g,$$

folglich $(a + b) x - (c + d) y : bx - dy = f + g : g.$

Das erste Glied dieser Proportion ist die Summe der Reste, und laut der Aufgabe gleich h, folglich das zweyte Glied $= bx - dy = \frac{g\ h}{f + g}$ und da auch $h : ax - cy = f + g : f$, so ist auch $ax - cy = \frac{f\ .\ h}{f + g}$. Wird nun die erste Gleichung mit c, die zweyte mit d multiplicirt, und beyde von einander subtrahirt, so erhalten

wir

wir . . $bcx - cdy = \frac{cgh}{f+g}$

und $adx - cdy = \frac{dfh}{f+g}$

$$x(bc-ad) = \frac{h(cg-df)}{f+g}$$

folglich $x = \frac{h(cg-df)}{(f+g)(bc-ad)}$

Da $bx - dy = \frac{gh}{f+g}$, so ist $y = \frac{bx}{d} - \frac{gh}{d(f+g)} = \frac{b(f+g)x - gh}{d(f+g)}$ in diese Formel den Werth für x gesetzt, giebt:

$$\frac{\frac{b.h.(cg-df)}{bc-ad} - gh}{d(f+g)} = \frac{h(ag-bf)}{(f+g)(bc-ad)}$$

Es sey: $a = 4$; $b = 5$; $c = 6$; $d = 7$; $f = 2$; $g = 3$; $h = 20$;

so ist $x = \frac{20.(6.4-7.2)}{5(5.6-4.7)} = \frac{4.4}{2} = 8$ und $y = \frac{20.(4.3-2.5)}{5.2} = 2.2 = 4$.

Die zwey ersten sind also $ax = 4.8 = 32$, und $bx = 5.8 = 40$, und die zwey andern sind $cy = 6.4 = 24$, und $dy = 7.4 = 28$;

$ax - cy : bx - dy =$ . . $f : g$

Probe. $32 - 24 : 40 - 28 = 8 : 12 = 2 : 3$
und $8 + 12 = 20 = h$.

100te

100ste Aufgabe.

Man verlangt zwey Zahlen, welche folgende Eigenschaften haben. Die erste nebst der Hälfte der zweyten macht a, und die zweyte nebst $\frac{1}{3}$ der ersten macht auch a

Auflösung:

x sey die erste und y die zweyte Zahl, so ist:

$x + \frac{1}{2} y = a$ oder $2x + y = 2a$; A

und $y + \frac{1}{3} x = a$ oder $6y + 2x = 6a$; B

folglich $B - A = 5y = 4a$ mithin $y = \frac{4}{5} a$

und $x = a - \frac{1}{2} y = a - \frac{2}{5} a = \frac{3}{5} a$

Es sey $a = 20$, so ist $y = \frac{4}{5} . 20 = 16$

und $x = \frac{3}{5} . 20 = 12$.

101ste Aufgabe.

Jemand wechselt 6 Friedrichsd'or und 2 Ducaten, giebt dafür 40 Thlr. 18 Gr. Münze. Zu einer andern Zeit wechselt er wiederum 9 Friedrichsd'or und 5 Ducaten, und giebt dafür 67 Thlr. 9 Gr. Münze. Zu beyden Zeiten stand der Cours der Gelder gegeneinander gleich. Es frägt sich daher, wie hoch hat derselbe den Friedrichsd'or und Ducaten in Münze bezahlen müssen?

Auflösung.

Der Friedrichsd'or habe x und der Ducaten y Thlr. gekostet, so muß: $6x + 2y = 40$ Thlr. 18 Gr. $= 40\frac{3}{4}$ Thlr. seyn.

Zweytens muß auch $9x + 5y = 67\frac{3}{8}$ Thlr. seyn.

$6x + 2y = 40\frac{3}{4}$ Thlr. subtrahirt.

$3x + 3y = 26\frac{5}{8}$ Thlr.

oder

$$\text{oder } 6x + 6y = 53\tfrac{1}{4}$$
$$\text{und } 6x + 2y = 40\tfrac{3}{4}$$
subtrahirt.
$$\text{giebt: } 4y = 12\tfrac{1}{2}$$
$$\text{folglich } y = 3\tfrac{1}{8} \text{ Thlr.}$$

Da $6x + 2y = 40\frac{3}{4}$, so $3x + y = 20\frac{3}{8}$, folglich x

$$\frac{20\frac{3}{8} - y}{3} \text{ also } x = \frac{20\frac{3}{8} - 3\frac{1}{8}}{3} = \frac{17\frac{2}{8}}{3} = 5\tfrac{3}{4} \text{ Thlr.}$$

102te Aufgabe.

A sagt zu B, vor 7 Jahren war ich gerade 3mal so alt als du, und in 7 Jahren werde ich gerade doppelt so alt seyn. Wie alt war anjetzo jeder?

Auflösung:

Das gegenwärtige Alter von A sey x, und von B, y.

Vor Sieben Jahren war also A, $x - 7$ Jahr alt und B, $y - 7$ Jahr.

Laut der Aufgabe muß $x - 7 = 3\,(y - 7)$ seyn.

Nach 7 Jahr ist A, $x + 7$ Jahr, und B, $y + 7$ Jahr alt.

und dann muß $x + 7 = 2\,(y + 7)$ seyn.

Es war $x - 7 = 3\,(y - 7)$
subtrahirt.

bleibt $14 = -y + 35$

oder $y + 14 = 35$

folglich $y = 35 - 14 = 21$ Jahr.

Da $x + 7 = 2\,(y + 7)$, so ist $x = 2y + 7 = 2 \cdot 21 + 7 = 49$ Jahr.

Probe. Vor 7 Jahren war A, $49 - 7 = 42$ Jahr, und B war $21 - 7 = 14$ Jahr, es ist aber wirklich $3 \cdot 14 = 42$. Nach 7 Jahren ist A, $49 + 7 = 56$ Jahr, und B, $21 + 7 = 28$ Jahr, und es ist wirklich $2 \cdot 28 = 56$.

103te Aufgabe.

Man soll einen Bruch errathen, von dem folgendes gesagt wird: Wenn man den Zähler um Eins vermehrt, so ist er $= \frac{1}{3}$; vermehrt man aber den Nenner um Eins, so ist er $= \frac{1}{4}$.

Auflösung:

Der gesuchte Bruch sey $\frac{x}{y}$. Die Bedingungen der Aufgabe geben folgende zwey Gleichungen:

$$\frac{x+1}{y} = \frac{1}{3} \text{ und } \frac{x}{y+1} = \frac{1}{4}$$

$$3x + 3 = y; \text{ und } 4x - 1 = y$$

$$\text{mithin } 4x - 1 = 3x + 3$$

$$\text{folglich } x - 1 = 3 \text{ und also } x = 4$$

$$\text{demnach } y = 4 \cdot 4 - 1 = 15.$$

Daher $\frac{x}{y}$ $\frac{4}{15}$, und wirkich ist $\frac{4+1}{15} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$; und $\frac{4}{15+1} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$, wie verlangt wurde.

104te Aufgabe.

Man soll einen Bruch errathen, der folgende Eigenschaft hat: Wenn man Eins vom Zähler abzieht, so ist er $= \frac{1}{4}$, und wird Eins vom Nenner abgezogen, so wird er $= \frac{1}{3}$.

Auflösung:

Der gesuchte Bruch sey $\frac{x}{y}$, so ist laut der Aufgabe

$$\frac{x-1}{y} = \frac{1}{4} \quad \text{und} \quad \frac{x}{y-1} = \frac{1}{3}$$

$$4x - 4 = y \quad \text{und} \quad 3x = y - 1$$

$$3x = y - 1$$

subtrahirt.

$x - 4 = 1$ folglich $x = 5$ und $y = 3 \cdot 5 + 1 = 16$, also der gesuchte Bruch $= \frac{x}{y} = \frac{5}{16}$.

105te Aufgabe.

Jemand kauft für 30 Gr. Aepfel und Birnen, und erhält 4 Aepfel für 1 Gr. und 5 Birnen für 1 Gr. Nachher läßt er die Hälfte seiner Aepfel und ein Drittel seiner Birnen an seinen Nachbar für 13 Gr. ab, so viel kosteten sie ihm selbst. Wie viel mag er also wol von jeder Sorte gehabt haben.

Auflösung:

Es sey x die Anzahl der Aepfel, und y die Anzahl der Birnen.

Da 4 Aepfel einen Groschen kosten, so kostet Ein Apfel $\frac{1}{4}$ Groschen, und daher x Aepfel $\frac{x}{4}$ Groschen. Ferner: da 5 Birnen einen Groschen kosten, so werden daher y Birnen $\frac{y}{5}$ Groschen kosten.

Es ist daher $\frac{x}{4} + \frac{y}{5} = 30$
oder $5x + 4y = 600$

$\frac{x}{2}$ Aepfel kosten ihm $\frac{x}{8}$ Groschen, und $\frac{y}{3}$ Birnen kosten ihm $\frac{y}{15}$ Groschen.

Daher $\frac{x}{8} + \frac{y}{15} = 13$; oder $15x + 8y = 1560$
da $5x + 4y = 600$, so ist auch $10x + 8y = 1200$
bleibt $5x = 360$
folglich $x = 72$ Aepfel.

Aus $5x + 4y = 600$, folgt $y = 150 - \frac{5}{4}x = 150 - \frac{5}{4} \cdot 72 = 150 - 5 \cdot 18 = 150 - 90 =$ 60 Birnen.

106te Aufgabe.

Man soll zwey Zahlen x und y finden, die so beschaffen sind, daß wenn man die eine so wol,

als die andere mit 18 multiplicirt, so soll das erste Produkt ein Quotient, und das zweyte die Wurzel dieses Quadrats seyn; aber wenn man eine jede Zahl mit 3 multiplicirt, so soll das erste Produkt eine Cubikzahl, und das zweyte die Wurzel dieses Cubus seyn.

Auflösung:

Von 18y das Quadrat gemacht, giebt $18 \cdot 18y^2$.
Es muß nun $18 \cdot 18y^2 = 18x$ seyn.
folglich $18y^2 = x$.
Der Cubus von 3y ist gleich $3 \cdot 3 \cdot 3\, y^3 = 3x$
folglich $9y^3 = x$, aber vorhin war $x = 18y^2$
Daher ist $9y^3 = 18y^2$
oder $9 \cdot y \cdot y \cdot y = 18 \cdot y \cdot y$.
folglich $y = 2$ und daher $x = 18 \cdot y^2 = 18 \cdot 4 = 72$.

Probe. $18 \cdot 72 = 18 \cdot 2 \times 18 \cdot 2 = 18 \cdot 2 \times 36 = 18 \cdot 72$,
und $3 \cdot 72 = 3 \cdot 2 \times 3 \cdot 2 \times 3 \cdot 2 = 3 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 2 = 3 \cdot 72$.

107te Aufgabe.

Als eine Gesellschaft ihre Zeche in einem Weinhause bezahlen wollte, finden sie, daß wenn 3 Personen mehr gewesen wäre, so würde jeder 1 Groschen weniger bezahlt haben, und wenn zwey Personen weniger gewesen wären, so hätte jede Person 1 Groschen mehr geben müssen. Wie viel Personen sind gewesen, und wie viel hat jede bezahlen müssen?

Auflösung:

Es sey x die Anzahl der Personen, und y die Anzahl Groschen, die jede von ihnen gegenwärtig hat geben müssen; so bezahlen sie zusammen xy Groschen.

Wä-

Wären 3 mehr, also $x + 3$ Personen gewesen, so hätte ein jeder nur $y - 1$ Groschen bezahlt, also alle $x + 3$ Personen zusammen $(x + 3)(y - 1) = xy + 3y - x - 3$.

Wären nur $x - 2$ Personen gewesen, so hätte eine jede $y + 1$ Groschen gegeben, und daher alle zusammen $(x - 2)(y + 1) = xy + x - 2y - 2$.

Wir haben demnach folgende zwey Gleichungen: $xy = xy + 3y - x - 3$ und $xy = xy + x - 2y - 2$ oder $0 = 3y - x - 3$ und $0 = x - 2y - 2$.

Beyde Gleichungen addirt, geben:

$$0 = y - 5; \text{ folglich } 5 = y$$

aus $0 = x - 2y - 2$, findet sich $x = 2(y + 1) = 2(5 + 1) = 12$.

108te Aufgabe.

Zwey Zahlen zu finden, deren Summe 2mal, und deren Produkt 12mal ihre Differenz gleich ist.

Auflösung:

Die größte der zu suchenden Zahlen sey x, und die kleinste y; ihre Summe ist $x + y$; ihre Differenz $x - y$, und ihr Produkt xy.

Demnach sind hier folgende zwey Gleichungen:

$$x + y = 2(x - y) \text{ und } xy = 12(x - y)$$

oder $x + y = 2x - 2y$ und $xy = 12x - 12y$.

Aus der ersten Gleichung folgt $3y = x$

Die zweyte Gleichung verändere ich so: $12y = 12x - xy$ oder $12y = (12 - y)x$. Der ganze Kunstgrif um nun y zu finden, beruhet darauf, eine Zahl zu finden, womit ich die erste Gleichung multipliciren muß, um damit bey der algebraischen Addition oder Subtraktion dieser Gleichungen sich alles, was uns jetzt hindert die

unbekannten Größen zu bestimmen, aufhebt. Ich betrachte daher die zweyte Gleichung genau und finde, daß x in $12 - y$ multiplicirt ist, ich multiplicire daher auch die erste Gleichung mit $12 - y$, und erhalte: $36y - 3y^2 = (12 - y) x$ ziehe ich nun diese Gleichung von der zweyten ab, so erhalte ich:

$$3y^2 - 24y = 0 \quad \text{mit } 3y \text{ dividirt.}$$

giebt $y - 8 = 0$ folglich $y = 8$

und daher $x = 3y = 3 \cdot 8 = 24$.

Diese Auflösung ist merkwürdig für Anfänger, wir haben bisher noch keine gehabt, die so künstlich gewesen wäre, ich werde daher diese Aufgabe allgemein auflösen.

109te Aufgabe.

Zwey Zahlen x, y zu finden, deren Summe amal, und deren Product bmal so groß, als die Differenz ist.

Auflösung:

Es ist $x + y = a(x - y) = ax - ay$, also $\frac{(a+1)y}{a-1} = x$; ferner ist $xy = b(x - y) = bx - by$.

Daher $by = bx - xy$ oder $by = (b - y)x$, multipliciren wir nun die erste Gleichung mit $b - y$, so erhalten wir: $(by - y^2)\frac{a+1}{a-1} = (b - y)x$. Diese Gleichung von der zweyten abgezogen, bleibt:

$$y^2 \cdot \frac{a+1}{a-1} + \frac{by(a-1) - by(a+1)}{a-1} = 0$$

$$y^2 \cdot \frac{a+1}{a-1} - \frac{-2by}{a-1} = 0 \quad \text{mit } \frac{y}{a-1} \text{ dividirt.}$$

giebt $y(a + 1) - 2b = 0$; folglich $y = \frac{2b}{a+1}$

Da $x = \frac{a+1}{a-1} \cdot y$, so ist $x = \frac{2b}{a-1}$

Es

Es erfordert einige Uebung, wenn man durch geschickte Multiplikation sich die Auflösung der Gleichungen erleichtern will, sonst ist auch hier die Auflösung leicht, wenn man in der Gleichung $by = (b - y)\, x$, den in die erste Gleichung für x gefundenen Werth setzt; es war nemlich $x = \frac{a + 1}{a - 1}\, y$

also $by = (b - y) \cdot \frac{a + 1}{a - 1} \cdot y$

mit $\frac{y}{a - 1}$ dividirt.

giebt $ab - b = (b - y)(a + 1) = ab + b - (a + 1)\, y$, und hieraus findet sich y wie vorhin.

Die für x und y gefundenen Formeln lassen sich bequem in folgenden Worten ausdrücken.

Man findet die gesuchte Zahl, wenn man die doppelte Zahl, die da anzeigt, wie vielmal das Produkt der Zahlen größer, als ihre Differenz ist, mit der um Eins vermehrten und verminderten Zahl, die da anzeigt, wie vielmal die Summe größer als die Differenz der Zahlen ist, dividirt. Die erste Division giebt die kleinste, die zweyte Division giebt die größte Zahl.

In der 108 Aufgabe ist $a = 2$ und $b = 12$, also $x = \frac{2 \cdot 12}{2 - 1} = 24$ und $y = \frac{2 \cdot 12}{2 + 1} = 8$ wie vorhin.

Sollen x und y nur positiv gelten, so muß man sich hüten, a nicht kleiner als Eins zu nehmen, weil sonst $x = \frac{2b}{a - 1}$ negativ würde, aber man darf auch a nicht gleich 1 setzen, das heißt: die Summe der Zahlen kann der Differenz dieser Zahlen nicht gleichgesetzt werden, denn alsdann würde $x = \frac{2b}{0} = \infty$ das heißt, größer als jede angebliche Zahl. Siehe den ersten Theil dieser Sammlung, Seite 127.

Note

110te Aufgabe.

Man verlangt zwey Zahlen, deren Differenz sich zur Summe dieser Zahlen verhält wie a : b, und die Summe zum Produkt wie c : d.

Auflösung:

Die größte der gesuchten Zahlen sey x, die kleinste y, so ist 1) $x - y : x + y = a : b$, also $x + y = \frac{b}{a}(x - y)$
und 2) $x + y : xy = c : d$

mithin $x - y : xy = ac : bd$, also $xy = \frac{bd}{ac}(x - y)$.
Vergleichen wir dieses mit der vorhergehenden Aufgabe, so ist das a und b in der vorhergehenden Aufgabe, hier $\frac{b}{a}$ und $\frac{bd}{ac}$, setzen wir also diese Werthe für a und b in die Formeln der vorhergehenden Aufgabe, so erhalten wir:

$$x = \frac{2 \cdot \frac{bd}{ac}}{\frac{b}{a} - 1} = \frac{2bd}{c \cdot (b - a)}; \text{ und}$$

$$y = \frac{2bd}{c\,(b + a)}.$$ Es sey $a = 2$; $b = 3$; $c = 3$ und $d = 5$, so ist $x = \frac{2 \cdot 3 \cdot 5}{3\,(3 - 2)} = 10$, und $y = \frac{2 \cdot 3 \cdot 5}{3\,(3 + 2)} = 2$.

111te Aufgabe.

Es wird eine zweyziffrige Zahl des decadischen Systems verlangt, die der vierfachen Summe ihrer Ziffern gleicht, und wenn man sie zu der zweyziffrigen Zahl 18 addirt, so soll sie einer Zahl gleich seyn, die herauskommt, wenn man die Ziffern in der gesuchten die Stellen verwechseln läßt.

Auflösung.

Diejenige Ziffer, welche in der Stelle der Zehner steht, sey x, und die in der Stelle der Einer, sey y, so wird die gesuchte Zahl folgendermaßen ausgedrückt; $10x + y$ und diese Zahl muß gleich $4(x + y)$ seyn.

Also $10x + y = 4x + 4y$
$6x = 3y$, folglich $y = 2x$

Wenn in der gesuchten Zahl $10x + y$, die Ziffern x, y ihre Stellen verwechseln, so bekommen wir folgende Zahl $10y + x$. Nun soll der zweyten Bedingung der Aufgabe gemäß: $10x + y + 18 = 10y + x$ seyn.

$9x + 18 = 9y$
mithin $x + 2 = y$, daher $2x = x + 2$, folglich $x = 2$, demnach $y = 2x = 4$, folglich die gesuchte Zahl $= 24$.

112te Aufgabe.

Es soll eine dreyfache Zahl im decadischen System gefunden werden, deren Ziffern um gleich viel wachsen. Diese Zahl durch die Summe ihrer Ziffern dividirt soll zum Quotient, 48 geben; aber wenn man von der gesuchten Zahl 198 abzieht, so soll eine Zahl heraus kommen, die derjenigen gleich ist, welche entstehen würde, wenn die Ziffern in der gesuchten Zahl ihre Stellen verwechselten.

Auflösung:

Die Ziffer in der Stelle der Hunderte sey x, und die Ziffer in der Stelle der Zehner sey y, so ist diese um $y - x$ größer als x, da nun laut der Aufgabe die 3te Ziffer, welche in der Stelle der Einer steht, um eben

so viel größer seyn muß, als die zweyte, so drückt man sie so aus $2y - x$; diese gesuchte Zahl selbst ist daher $100x + 10y + 2y - x = 99x + 12y$.

Der ersten Bedingung gemäß ist:

$$\frac{99x + 12y}{x + y + 2y - x} = \frac{99x + 12y}{3y} = \frac{33x + 4y}{y} = 48$$

oder $33x + 4y = 48y$; oder $33x = 44y$; oder $3x = 4y$, mithin $\frac{3}{4}x = y$.

Verwechseln die Ziffern ihre Stellen, so werden die Einer $2y - x$, Hunderte, die Hunderte x aber werden Einer, die Zehner y behalten ihre Stelle, demnach entstehet folgende Zahl; $200y - 100x + 10y + x = 210y - 99x$.

Laut der zweyten Bedingung ist:

$210y - 99x = 99x + 12y - 198$ — $12y$ subtrah.

$198y - 99x = 99x - 198$ — $99x$ addirt.

$198y = 198x - 198$ — mit 198 dividirt.

folglich $y = x - 1$

Vorhin fanden wir $y = \frac{3}{4}x$, daher $\frac{3}{4}x = x - 1$, oder $1 + \frac{3}{4}x = x$, oder $1 = \frac{1}{4}x$,

folglich $x = 4$.

Daher $y = x - 1 = 4 - 1 = 3$; und die dritte $2y - x = 2 . 3 - 4 = 2$. Demnach die gesuchte Zahl $= 432$.

In der Auflösung nahm ich an, daß die Ziffern von der höchsten bis zur niedrigsten wachsen, allein das Resultat zeigt uns, daß sie nicht wachsen, sondern um gleichviel abnehmen, allein jene Voraussetzung widerspricht diesem Resultat keineswegs, und die Sache verhält sich

so

so: wenn man in der Algebra sagt, die Größe y sey um $y - x$ größer als x; so nimmt man solches in dem allgemeinsten Sinne, so daß wenn x auch größer, als y seyn sollte, man doch sagen kann, daß y um $y - x$ größer, als x ist, denn wenn ich zu x, $y - x$ addire, so erhalte ich wiederum y, freylich ist, wenn $x >$ als y, $y - x$ negativ, und wenn ich daher die Ziffer in der Stelle der Einer durch $y + (y - x) = 2y - x$ ausdrückte, so ist wenn $y - x$ negativ, auch $y + (y - x) = 2y - x < y$, und zwar ist $2y - x$, um $y - x$ kleiner als y, und so verhält es sich immer bey allen änlichen Fällen.

113te Aufgabe.

A und B haben eine gewisse Anzahl Zahlpfennige. A giebt an B so viel, als B bereits hat; nun giebt B wieder so viel an A zurück, als A behalten hat; Nun giebt A wieder so viel an B, als B behalten hat, und so fort; nach vier solchen wechselseitigen Geschenken, hat ein jeder gerade 16 Zahlpfennige. Wie viel hat ein jeder anfangs gehabt?

Auflösung:

A habe x, und B, y Zahlpfennige gehabt. Wenn A, y weggiebt, so bleiben ihm $x - y$.

B hat nun $2y$. Nun giebt B an A, $x - y$; B behält also $3y - x$.

A hat nun $2x - 2y$, giebt aber nun wieder an B, $3y - x$, behält also nur $3x - 5y$.

B hat nun $6y - 2x$, giebt aber nun wieder an A, $3x - 5y$, behält also $11y - 5x$,

A hat nun $6x - 10y$.

laut den Bedingungen der Aufgabe soll $11y - 5x = 16$ und $6x - 10y = 16$ seyn.

Bey-

Beyde Gleichungen addirt, geben $y + x = 32$, folglich $y = 32 - x$, diesen Werth für y in die Gleichung $6x - 10y = 16$ oder $3x - 5y = 8$, gesetzt, giebt $3x - 160 + 5x = 8$ oder $8x = 168$, folglich $x = 21$ und daher $y = 32 - 21 = 11$.

Probe.

A hat 21, giebt an B der 11 hat, 11 Stck. behält also $21 - 11 = 10$.

B hat nun 22, giebt aber jetzt an A, 10, behält also $22 - 10 = 12$.

A hat nun wieder 20, giebt davon an B, 12, behält also $- 12 = 8$.

B hat nun 24, giebt an A, 8, behält also $24 - 8 = 16$,

und A hat nun auch 16, wie es die Aufgabe verlangte.

Hätte man die Gleichungen nicht gleich 16, sondern allgemein gleich n gesetzt. Z. B. $11y - 5x = n$; und $6x - 10y = n$, so würden wir hieraus $y = \frac{11}{16} \cdot n$ und $x = \frac{21}{16}n$ finden. Diese für x und y gefundenen Formeln lassen uns leicht übersehen, was man statt n = für ganze Zahlen nehmen muß, um für x und y ganze Zahlen zu haben, nemlich hier muß n, entweder 16 selbst, oder jedes Vielfache von 16 seyn, als: 32, 48, 64 u. s. w., denn nur in diesen Zahlen gehet 16 auf. Zugleich wird man sehen, daß 16 die kleinste Zahl ist, die man für n setzen darf.

Diese und einige der nächst vorhergehenden Aufgaben, habe ich aus dem ersten Theile von Saundersons Elemens d'Algebre, traduit de l'anglois en francois par Mr. de Joncourt. 2 Tomes in 4to. Amsterdam et Leipzig. entlehnt. Saundersons Auflösungen sind von den Meinigen verschieden. Von dieser schätzbaren Algebra habe ich schon längst eine deutsche Uebersetzung mit Anmerkungen und Zusätzen liegen, die ich herausgeben will, sobald sich ein Verleger dazu findet.

Anzeige der Druckfehler,

die sich im ersten Theil dieser Sammlung algebraischer Aufgaben befinden.

S. XI. Zeile 2 v. u. statt, als die Sonne – Erde, lies, z. B. die Sonne ist größer, der Mond –

XII. Z. 2, st. den, l. dem

" " Z. 3, st. der. l. die

XVI. Z. 6 und 7, streiche, mir aus

XX. §. 15. Z. 2, l. ist es nothwendig

XXI. Z. 5, st. kennen, l. können

" " Z. 3, v. u. st. jener, l. dieser

XXII. Z. 6, st. – (+ab, l. – (+ab)

" " §. 18. Z. 6, st. diese, l. diesen

XXIII. Z. 5 und 7 v. u. st. qdf, l. 9df.

XXVI. Z. 2, st. qp, l. 9p.

XXVIII. §. 26. Z. 9, st. + 8m, l. – 8m

" " Z. 4, v. u. l. – c.

XXXI. No. 6. l. im Produkt 32ab

" " In der ersten Zeile unter dem Ex. st. das erste, l. dem ersten.

" " §. 29. Z. 6, l. in eine positive

XXXII. §. 30. Z. 2, st. + 3, l. – 3

" " Z. 7 v. u. l. in das erste des –

" " Z. 6 v. u. l. mit dem, Z. 5, l. vom

XXXIV. Im Quotienten des 3ten Ex. l. – 3a

XXXV. Z. 4, v. u. st. 3 . a l. 3 ; a

XXXVI. Z. 3, st. ist? l. sey?

XXXVII. Z. 11, l. Divisor an

XXXXI. Z. 1, statt $\frac{n.qsp}{m.qsp}$, lies $\frac{n.qsb}{m.qsb}$

" " §. 45. Z. 3, l. entweder, so, daß man

" " Z. 4 l. verwandelt, und solche miteinander multiplicirt.

" " Z. 5, st. nmb, l. amb

XXXXII. Z. 6, st. =, l. +. Z. 13 l. $528\frac{15}{56}$

" " §. 46. Z. 4, l. $\left(a + \frac{c}{b}\right) : n.$

S. XXXXIII. Z. 9, l. $\frac{a \cdot dhbdhcqc}{b \cdot dhbdhcqc}$. Zeile 16, l. nur folgendes. Das unten stehende Ex. zur Ausfindung des kleinsten Generalnenners, streiche man aus, und substituire folgendes:

$$
\begin{array}{l}
b)\ \underline{b,\ d,\ h,\ bd,\ hc,\ qc} \\
\quad 1,\ d,\ h,\ d,\ hc,\ qc \\
d)\ \overline{1,\ 1,\ h,\ 1,\ hc,\ qc} \\
h)\ \overline{1,\ 1,\ 1,\ 1,\ c,\ qc} \\
c)\ \overline{1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ q}
\end{array}
$$

Dieses Verfahren wird verkürzt, wenn man sogleich b, d, h ausstreicht, weil sie schon in bd und hc enthalten sind, nun bleiben noch bd, hc, qc übrig, hier lasse ich wieder c weg, weil dieser Faktor zweymal da ist, und so erhalte ich also bd, h, und qc, die in einander multiplicirt, den kleinsten Generalnenner geben.

Also bdhcq der gesuchte Generalnenner.

XXXXIV. Z. 9, l. in den, Z. 15 st. Grundton, l. Grund davon

XXXXV. Z. 4 l. (2x – b) (x – b);

XXXXVI Z. 7 st. zähle, l. Zähler. Z. 17, st. jene, l. diese

XXXXVII. Z. 7 l. von 5ten. Z. 10, st. 12 l. n

XXXXVIII. §. 52. Z. 1, streiche, daß, weg, und Z. 2, streiche sind weg, setze nach, Zahlen, und letzere positiv. Z. 12 st. q l. 9.

XXXXIX. Z. 12, streiche Ex aus, und setze das Punktum sogleich hinter folgende

L. §. 53. letzte Zeile, l. Caracteristische.

LI §. 55. Z. 8, st dreymal, l. weiter

LIII. §. 58 im letzten Ex. st. 7,9991, l. 000,

LVII. §. 61. Z. 3, st. 3, 308 l. 3, 38.

Z. 4, st. $\frac{1}{10000}$ l. $\frac{1}{1000}$

LVIII. §. 62. Beyspiele Z. 3, l. $\frac{2,0000}{3}$.

LXI. Z. 6, st. 12, l. n.

LXII. gleich unter der Rechnung, Z. 1 und 2 streiche die drey letztenmale das Wort, durch, weg.

Seite 19. Z. v. u. st. adbirt, l. addirt
» 21. Z. 1, l. jüngster Bruder
» 22. Z. 7, l. so ihm übrig
» 23. Aufg. 36. Z. 3. st. mehr, l. so viel
» 38. Z. 3 streiche, bekommen aus, und setze, und der 2te 10mal so viel, als sein – beträgt bekommen.
» 53. Z. 5, l. 16 Fl. – 12 Fl. 74 Aufgabe Z. 2, l. Sorte Wein Z. 9 st. c l. b, und setze noch dazu des verlangen = c
» 57. Probe. Z. 2, l. Bürgerhäuser
» 60. Z. 6, v. u. l. $3\frac{1}{2}$ Thlr.
» 67. 88 Aufgabe, ist die Auflösung unrichtig, und muß wie folget stehen:

Zu Ende des ersten – – er gewonnen $2x - 100$
des zweyten » » $4x - 300$
des dritten » » $8x - 700$
addirt.
$14x - 1100 = 3x.$
woraus sich $x = 100$ Louisd'or findet.

Die Auflösung der 90 Aufg. ist auch unrichtig, und muß folgende seyn:

In 9 Monaten erhält er $\frac{9}{12} \cdot 265$ Thlr. $= \frac{3}{4} \cdot 265 = 198\frac{3}{4}$ Thlr. Aber er erhielt in eben der Zeit von seinem Herrn für x Thlr. Kleidungsstücke und Wäsche, und noch 78 Thlr., also muß:
$198\frac{3}{4} = x + 78$ seyn
folglich $120\frac{3}{4}$ Thlr. $= x$

Die Auflösung der 92sten Aufg. muß folgende seyn
Er bekömmt für $30 - x$ Lohn $\frac{5}{4}(30 - x)$ Thlr., aber für x Tage, die er nicht gearbeitet hat, muß er mir $\frac{x}{2}$ Thlr. bezahlen, diese ziehe ich also von seinem Lohne ab, und er erhält also noch von mir $\frac{5}{4}(30 - x) - \frac{x}{2} = 6$ Thlr.

Also $150 - 5x - 2x = 24$
oder $150 - 7x = 24$
und $150 - 24 = 7x$
und $126 = 7x$
folglich $\frac{126}{7} = 18 = x$ Tage.

Probe. Also für 18 Tage, die er nicht gearbeitet, bezahlt er mir 9 Thlr. Gearbeitet hat er mir 30 - 18 = 12 Tage, dafür würde er von mir 15 Thlr. erhalten, er erhält also von mir 15 - 9 = 6 Thlr.

Seite 72. Z. 5, l. Bataillons.

„ 77. Z. 17 und 18, l. alle Stunden die einen Mann nöthigen.

„ 84. 150 Aufg. Z. 4, l. 4, st. 3.

Die 123 Aufg. läßt sich kürzer und leichter so auflösen: Setzt man, daß das Einholen in y Stunden geschehen ist, so erhält man folgende Gleichung $\frac{11}{3}y = \frac{5}{2}(q + y)$, also $y = 19\frac{2}{7}$ Stunden, und in $19\frac{2}{7}$ Stunden legt der nachgeschickte Bote $\frac{11}{3}$ mal $19\frac{2}{7} = 70\frac{5}{7}$ Meilen zurück.

Seite 113. Z. 9, v. u. l. q st. 9.

„ 118. Z. 4, v. u. st. 12 l. n. Z. 8, st. $8\frac{7}{19}$ l. $8\frac{8}{19}$

„ „ Z. 12, st. $1\frac{12}{19}$ l. $1\frac{11}{19}$ und st. $8\frac{7}{19}$, l. $8\frac{8}{19}$.

„ „ Z. 13, st. $1\frac{12}{19}$, l. $1\frac{11}{19}$.

Ueberall lies, Stollfirste und Stollort, statt Stellfirste und Stellort.

Druckfehler im zweyten Theil.

Seite 7 Z. 3, v. u. st. stets, l. steht.

„ 8 Z. 10, v. o. st. den, l. die

„ 12 Z. 4, „ st. auf, l. auch

„ 15. §. 26. Z. 7, st. unbekanne, l. unbekannte

„ 17. §. 31. Z. 4, st. $a2x$ l. a^2x

„ 22. Anmerk. Z. 2, st. chade l. schade

„ 28 Z. 2, l. $u^{\frac{a+b+c-d}{4}}$

„ 34. Z. 3, v. u. st. $\frac{b}{q}$ lies $\frac{b}{a}$

„ Z. 2, v. u. st. $\frac{nc+1}{e}$ lies $\frac{n+c1}{e}$

„ 36. §. 65. Z. 3, l. $(a-h)-(b-k) = d-\delta$

„ 39. letzte Z. l. e^2 st. e

„ 40. §. 72. Z. 4, l. homologi

„ 44. 79. Z. 3. l. $b-g = d$

Seite 45. Z. 8, l. vierten
- 46. Z. 11, v. u. st. eine, l. einer
- - . 10, v. u. l. das vierte
- 48. §. 85. Z. 3, st. der umgeänderten, l. den andern
- 49. Z. 4 st. in, l. und. Gleich unter der ersten Anmk. muß über, wenn a : b = c : d der §. 89. bemerkt werden.
- 50. Z. 5, v. u. st. a . c, lies a : c
- 52. §. 45. Z. 3, st. 12 l. n
- 54. Z. 7, st. f : b c = : k, l. f : b = c : k
- 56. Z. 7, v. u. der Strich unter $197\frac{1}{5}$ gr. ist wegzustreichen.
- 57. Z. 1, am Ende, st. 328 P. F. l. 328 . 1 P F.
- 58. Z. 14, st. 7 lb. 12 Rthlr. l. 7 lb. zu 12 Rthlr.
- 59. Z. 4, v. u. darf der Strich nicht unter x gezogen seyn, dergleichen wird man öfter antreffen.
- 67. Z. 13, v. u. st. nennt, l. nannt. Z. 10, l. $\frac{1}{2}$ rthlr. + $\frac{1}{12}$ rthlr.
- 85. Z. 12, l. 3 . 6 oder 2 . 9.
- 86. Z. 5, st. 2 . 17, l. 56 . 3 . 2 . 17
- 87. Z. 8 st. $4\frac{316}{790}$ rthlr. l. 790
- 88. am Ende des 112 §., ist vergessen die Summe zu ziehen, diese beträgt 143 rthlr. 10 gr. 6 pf.
- 92. Z. 6, hinter würde, streiche das Comma aus.
- 94. Z. 9, neben 16 lies $6\frac{2}{5}$, st. $4\frac{4}{5}$.
- 96. Z. 13, streiche da aus
- 100. Z. 12 und 13, l. Rechenmaschine
- 111. Z. 9, v. u. st. 2y l. 2x
- 113. letzte Zeile, st. $n^1 - na$, l. $n^2y - na$
- 114. Z. 2, v. u. l. mit n − 1 dividirt
- 117. Z. 3, l. so behält B noch
- 120 Z. 5, v. u. l. $y = \frac{(m+n+2)a}{n-m}$
- 121. letzte Z. l. noch als Bruch kleiner dem m seyn,
- 122. Z. 10, st. 4 ; 0, l. 40. Z. 11 streiche seyn aus.
- - Z. 12, st. für = 1, l. seyn. Z. 20, st. 12 l. n.
- 123. Z. 4, l. 15 und 20 seyn.
- 130. Z. 10, v. u. st. hätte, l. hatte.

Seite 131. Z. 3, l. $x = \frac{(3n+1)a}{n-1}$

" 140. Z. 8, v. u. l. b. $\frac{ac}{a+b}$. Z. 7, v. u. l. $\frac{(b+a)c}{a+b} = c$

" 141. stehet 641, letzte Z. l. bestimmen

" 149. Z. 15 und 16, st. zu zählen, l. und Zahlen

" 151. Z. 8 streiche a l l e i n aus

" 153. Z. 19, l. Griechisch.

" 157. Z. 15, st. oder l. aber

" 161. Z. 5, l. $\frac{ac+bd}{c+d} = x$

" 194. Z. 11 und 10, v. u. st. einzelne, l. besondere

" 206. Z. 3, v. u. l. $2a + \frac{x - 2a - A}{b}$.

" " Z. 2, streiche # weg

Auf Seite 222 folgt 223 und nicht 228.

Folgendes zur Berichtigung der Litteratur:

Ich habe mit einiger Befremdung im Leipziger Meß-Verzeichniß, und auch in öffentlichen Blättern meinen Nahmen falsch geschrieben, und mit ganz falschen Taufnahmen begleitet gefunden. So finde ich z. B. in der Encyklopädie aller mathematischen, Wissenschaften Erster Band Erste Abtheilung. Seite 70, folgendes Buch:

G r y s o n s. C. F. vollständige Sammlung nützlicher und angenehmer arithmet. Aufgaben. Halle, bey J. C. Hendel. 1792.

Weiter unten wird dort auch gegenwärtiges Werk angeführt. nur stehet statt G r ü s o n, G r y s o n.

Ich weiß nicht woher diese verschiedene Nahmen und Titel eines und ebendesselben Buches kommen mögen. Pflicht ist es daher, solches hier anzuzeigen, daß dieses weder zwey verschiedene Verfasser, noch zwey verschiedene Bücher sind.

Der dritte Theil dieses Werks folgt zur nächsten Michaelis-Messe.

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Grüson, Johann Philipp,

Sammlung Algebraischer Aufgaben nebst einer Einleitung in die Buchstabenrechnung und Algebra

Bd.: 2

Halle 1794

Math.p. 191-1/2
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10081882-7
VD18 80317146-001